Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika

ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV
NATIONAL INSTITUTE FOR EDUCATION

Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika

Matematika pre učiteľov informatiky 3

Predmet: Matematika pre učiteľov informatiky

Línia: Vlastný odborový kontext informatiky a informatickej výchovy

Operačný program VZDELÁVANIE

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond

Európska únia
Európsky sociálny fond

Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov ES

Matematika pre učiteľov informatiky 3

Identifikácia modulu

Aktivita projektu:	1.2 Vzdelávanie nekvalifikovaných učiteľov informatiky na 2. stupni ZŠ a na SŠ
Línia aktivity:	Vlastný odborový kontext informatiky a informatickej výchovy
Predmet:	Matematika pre učiteľov informatiky 3

Garant predmetu:

RNDr. Katarína Bachratá, PhD., ŽU, Žilina
katarina.bachrata@fri.uniza.sk

Autori textu:

Mgr. Peter Czimmermann, PhD., ŽU Žilina
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., UPJŠ Košice

Zaradenie modulu

Modul *Matematika pre učiteľov informatiky 3* je zaradený do vzdelávania v rámci aktivity 1.2 a do 3. semestra. Jeho formálnymi prerekvizitami sú, prirodzene, predchádzajúce matematické moduly *Matematika pre učiteľov informatiky 1* a *Matematika pre učiteľov informatiky* 2 a on slúži ako formálna prerekvizita tým modulom, kde sa používa matematika.

Abstrakt modulu

Tento modul je venovaný dôležitej matematicko-informatickej štruktúre – grafom. Je rozdelený do dvoch štvorhodinových celkov.

Prvý je venovaný riešeniu hlavolamov nazývaných prievoznícke úlohy (začíname azda najznámejším – o vlkovi, koze a kapuste). Na ich riešení sa prirodzeným spôsobom ukazujú jednotlivé fázy procesu zdolávania problémov podobného typu:

1. modelovanie, t. j. voľba vhodnej dátovej reprezentácie,
2. diskretizácia a redukcia na konečne veľa „stavov“ (alebo akýchsi konfigurácií),
3. reformulácia podmienok úlohy vo zvolenej dátovej štruktúre a eliminácia neprípustných stavov,
4. formulácia prechodovej podmienky medzi stavmi,
5. použitie vhodného algoritmu na nájdenie požadovanej cesty,
6. spätná interpretácia nájdenej cesty do riešenia v reči pôvodnej úlohy.

Pri jednotlivých fázach tohto procesu sa ukazuje, že vhodným modelom takejto úlohy je diagram, ktorý má isté uzly a ich spojnice, ktorý sa odborne nazýva graf. Špeciálne v 5. fáze sa potom stretávame s prirodzenou potrebou príslušného grafového algoritmu.

Drvivá väčšina vzťahov v realite má binárny charakter. Nie je to preto prekvapením, že grafové štruktúry sa pri modelovaní reálnej situácie vyskytujú veľmi často: Ich uzly – tzv. vrcholy – sú objekty, medzi ktorými uvažujeme o modelovanom vzťahu, každá spojnica – tzv. hrana – medzi dvoma uzlami potom vyjadruje, že medzi nimi tento vzťah je. Mnohostranné využitie takýchto štruktúr má za následok pomerne búrlivý rozvoj teórie grafov.

V druhej časti textu sa preto budeme grafom venovať podrobnejšie:

1. V časti *Základné pojmy* sa poslucháči oboznámia so základnými pojmami teórie grafov. Zavedieme pojmy graf, vrchol, hrana, ale i stupeň vrchola či podgraf grafu. Ukážeme niekoľko príkladov využitia grafov.
2. V časti *Súvislosť v grafe* by sa mali poslucháči zoznámiť s pojmami sled a súvislosť. Bude uvedený postup (algoritmus), ktorým sa možno „vymotať“ z každého bludiska.
3. V časti *Vzdialenosť vrcholov* by sa mali poslucháči zoznámiť s pojmami cesta v grafe a vzdialenosť dvoch vrcholov, zodpovedajúca dĺžke najkratšej cesty. Vzhľadom na to, že tieto pojmy sú intuitívne jasné, je možné pracovať so vzdialenosťou aj v hranovo-ohodnotených grafoch. Ukážeme algoritmus na hľadanie najkratšej cesty medzi vrcholmi a jeho využitie v praxi (napríklad GPS) a popíšeme pokusu sociológa S. Milgrama o priemernej „vzdialenosti“ medzi ľuďmi.
4. V časti *Stromy a kostry* budú poslucháči oboznámení aj s pojmami strom, koreňový strom a binárny strom. Ukážeme, ako riešiť úlohu o elektrifikácii, ktorú riešili v medzivojnovom období českí matematici.
5. V časti *Pochôdzky v grafoch* sa poslucháči dozvedia o tom, kedy sa dajú grafy (obrázky) kresliť jedným ťahom a aké je možné využitie tejto úlohy v praxi. Podobne uvedieme popis úlohy obchodného cestujúceho a povieme si niečo o spôsoboch hľadania optimálneho riešenia v úlohách tohto typu.
6. V časti *Farbenie grafov* sa začne úlohou o minimálnom počte farieb potrebných na zafarbenie mapy. Poslucháči budú oboznámení s úlohami o farbení grafov a ich aplikáciami, napríklad pri nastavovaní svetelných križovatiek alebo pri prideľovaní spojov na nástupištia.

Poslucháči sa tak oboznámia s matematickými aplikáciami, ktoré sú prezentovateľné už žiakom na základných školách. Uvedieme aj niektoré príklady, ktoré stáli pri zrode teórie grafov a zapísali sa do dejín matematiky. Priblížime si aj niektoré prepojenia medzi teóriou grafov a informatikou.

Cieľ modulu

Cieľom tohto predmetu vo všeobecnosti je priniesť učiteľom informatiky poznatky z oblastí matematiky, ktoré súvisia s rozvojom informatiky. V tomto kurze je, žiaľ, matematike venovaného tak málo priestoru, že sa musíme obmedziť iba na vybrané kapitoly. Uvedomujeme si, že úroveň vedomostí z matematiky u poslucháčov je veľmi rôznorodá – od kvalifikovaných učiteľov matematiky, ktorí ju denne učia, až po učiteľov iných aprobácií, z ktorých niektorí sa matematike nevenujú prakticky od strednej školy. Z tohto pohľadu môže byť problematické zosúladiť vyučovanie tém tak, aby sme nenudili prvú skupinu učiteľov a zároveň „neutiekli“ učiteľom z tej druhej. Domnievame sa, že vybrané témy umožňujú vybrať postup, ktorý bude vyhovovať obom skupinám. Okrem toho, že poslucháčom sprostredkujeme matematické poznatky, ktoré priamo súvisia s informatikou, tieto témy môžu poskytnúť učiteľom matematiky zaujímavé nápady a inšpiráciu aj na hodiny matematiky. Tu treba zdôrazniť, že nechceme nikoho poučovať, ako má učiť žiakov na základných a stredných školách – naši poslucháči to vzhľadom na svoje vzdelanie a prax vedia nepochybne lepšie ako my.

Teória grafov (a niekde aj diskrétna matematika), žiaľ, nie je zaradená na všetkých inštitúciách venujúcich sa príprave budúcich učiteľov matematiky a informatiky medzi povinné predmety. Na druhej strane poslucháči, ktorí neštudovali matematiku, budú mať možnosť sledovať a vyskúšať si prechod od úloh zábavnej matematiky k zaujímavým a dôležitým aplikáciám na takej úrovni, ktorá im umožní porozumieť jednotlivým krokom pri tomto prechode. Preto dúfame, že teória grafov zaujme ako učiteľov matematiky, tak i tých, ktorí matematiku nevyučujú.

Obsah

1. Prievoznícke úlohy (S. Krajči) ... 5
1.1. Príklad 1 ... 5
1.2. Prvé riešenie príkladu 1 ... 5
1.3. Príklad 2 ... 6
1.4. Pokus o riešenie príkladu 2 ... 6
1.5. Druhé riešenie príkladu 1 ... 6
1.6. Metóda riešenia prievozníckych úloh ... 11
1.7. Riešenie príkladu 2 (podľa metodiky) ... 12
1.8. Ďalšie prievoznícke úlohy ... 15
1.9. Príklad 3 ... 15
1.10. Riešenie príkladu 3 ... 16

2. Grafy, ktoré nie sú grafmi funkcií (P. Czimmermann) ... 23
2.1. Základné pojmy ... 23
2.1.1. Oboznámenie sa s pojmom graf ... 23
2.1.2. Stupeň vrchola ... 24
2.1.3. Podgraf grafu ... 26
2.1.4. Príklady využitia grafov ... 26
2.2. Súvislosť v grafe ... 27
2.2.1. Sledy medzi vrcholmi ... 27
2.2.2. Súvislé a nesúvislé grafy ... 27
2.2.3. Ako nájsť cestu z bludiska ... 28
2.3. Vzdialenosť vrcholov ... 29
2.3.1. „Spoločenská vzdialenosť“– Milgramov pokus ... 29
2.3.2. Cesta medzi dvoma vrcholmi ... 30
2.3.3. Hľadanie najkratšej cesty ... 30
2.4. Stromy a kostry ... 32
2.4.1. Súvislé acyklické grafy - stromy ... 32
2.4.2. Kostra grafu ... 32
2.5. Pochôdzky v grafoch ... 33
2.5.1. Kreslenie grafov jedným ťahom ... 33
2.5.2. Úloha čínskeho poštára ... 34
2.5.3. Úloha obchodného cestujúceho ... 35
2.6. Farbenie grafov ... 36
2.6.1. Farbenie máp ... 36
2.6.2. Rovinné grafy ... 36
2.6.3. Farbenie grafov ... 37
2.6.4. Využitie farbenia grafov ... 38

1. Prievoznícke úlohy

1.1. Príklad 1

Istý chudobný prievozník dostal za úlohu previezť cez rieku vlka, kozu a kapustu. Mal však len jeden člnok, do ktorého sa okrem neho zmestil len jeden z týchto troch organizmov. Dobre vedel, že vlk si brúsi zuby na kozu a tá zasa poškuľuje po kapuste, preto nechcel žiadnu z týchto dvojíc nechať bez svojho dozoru. Našťastie, vlk, napriek tomu, že bol hladný ako vlk, o kapustu žiaden záujem nejavil. Divokosť rieky prievozníkovi nedovoľovala s člnkom, svojím jediným živobytím, žiadne experimenty, ak ho chcel použiť (a veru, nič iné mu neostávalo), musel v ňom sedieť. Ako mal vlka, kozu a kapustu bez úhony prepraviť na druhý breh rieky?

Táto úloha sa nachádza v zbierka zaujímavých matematických úloh s názvom *Úlohy na cibrenie umu mladých*, ktorej autorom bol anglický mních, učiteľ, filozof i básnik Alcuin z Yorku (asi 735-804), dvoran Karola Veľkého v Aachene.

(zdroj obrázka: http://historyofscience.com/G2I/timeline/images/alcuin.jpg)

Aktivita	Vysvetlite svoje riešenie spolužiakovi.

1.2. Prvé riešenie príkladu 1

Kapacita člnka jasne naznačuje, že na jeden šup to prievozník nezvládne (veď čo by to už bol za hlavolam :-)), bude teda zrejme musieť kmitať medzi brehmi tam a späť. Pri prvej plavbe má čisto teoreticky štyri možnosti:

1 do člna vezme vlka,

2 do člna vezme kozu,

3 do člna vezme kapustu,

4 v člne pôjde sám.

Pri prvej možnosti by však po odchode člnka na pôvodnom brehu ostali koza a kapusta, z čoho by sa už tá druhá asi nespamätala. Túto možnosť teda musíme vylúčiť. Podobne je na tom tretia možnosť, keď by na na nekontrolované spoločenstvo s vlkom doplatila pre zmenu koza. Štvrtá možnosť je úplná katastrofa, tu môžeme len hádať, či koza stihla zožrať kapustu skôr, než s ňou podobne naložil vlk. Ak to teda zhrnieme, jediná rozumná možnosť je teda druhá, a to, že prievozník odvezie na druhý breh kozu, pričom na pôvodnom zostane bezproblémová dvojica vlk a kapusta.

Čo ďalej? Prievozník (keďže úlohu zatiaľ nesplnil) má tentoraz dve možnosti: Buď odvezie kozu späť – to by si však veľmi nepomohol, veď by sa dostal do pôvodného stavu –, alebo ju nechá na druhom brehu a naspäť pôjde sám. Takže zrejme druhá možnosť.

A opäť má dve možnosti (tretiu, že pôjde späť sám, už ani nebudeme rozoberať), tu je však v dileme: odvezie vlka, alebo radšej kapustu? Ani jedna sa nejaví na prvý pohľad problematická, skúsi to teda s vlkom. Keď ho však prevezie na druhý breh, hrozí nebezpečenstvo jeho nerovného súboja s kozou, nemôže sa teda len jednoducho vrátiť po kapustu. Vlka späť brať nebude, to by sa vrátil do situácie, v ktorej už raz bol. Jediná možnosť je teda odviezť kozu späť na pôvodný breh. Tu vezme kapustu a zavezie ju do bezpečia k vlkovi. Ostávajú mu poslednú dve plavby, pri ktorých sa vráti po kozu a odvezie ju na druhý breh, kde ich už čaká vlk s úplne nedotknutou kapustou. Prievozník teda úlohu splnil (a my s ním).

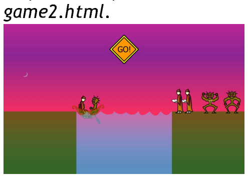
Úloha	Ako by to dopadlo, keby sa v spomínanej (jedinej!) dilematickej možnosti prievozník rozhodol pre kapustu?

1.3. Príklad 2

Cez ešte divokejšiu rieku sa teraz majú preplaviť traja kanibali a traja misionári. K dispozícii majú opäť iba člnok, tentoraz však dvojmiestny a bez prievozníka. Každý z týchto šiestich ľudí je schopný dopraviť člnok na opačný breh, problém je však v inom: Misionári sa musia vyvarovať situácie, keď ich je menej než ľudožrútov, lebo tí sa v takom prípade neubránia svojej prirodzenosti a počet misionárov nenávratne klesne. Navyše v každom okamihu musí mať člnok aspoň jedného člena posádky. Ako majú títo ľudia postupovať, aby sa na druhý breh dostali všetci šiesti v pôvodnom stave?

1.4. Pokus o riešenie príkladu 2

Dobrou pomôckou je vtipná animácia na stránke *http://www.plastelina.net/game2.html*.



Po niekoľkých (obvykle neúspešných) pokusoch sa rýchlo presvedčíme, že táto úloha je podstatne ťažšia než predchádzajúca, hoci sú tematicky príbuzné. Navyše si musíme uvedomiť, že aj keby sa nám riešenie podarilo nájsť, treba ho zapísať tak, aby ho bolo možné kedykoľvek jednoducho zrekonštruovať. (Autor musí sebakriticky priznať, že pokiaľ ide o vysvetlenie riešenia, už v prvom príklade sa pohybuje na hrane prehľadnosti, a to sme mali na výber vlastne len na jednom mieste, pričom obe voľby viedli rovnako dobre k nejakému riešeniu.) Budeme si preto musieť nájsť taký spôsob, ktorý nám umožní riešenie ako jednoducho nájsť, tak ešte jednoduchšie vysvetliť. Aby sme mali spätnú kontrolu, budeme pracovať s už vyriešeným príkladom 1.

1.5. Druhé riešenie príkladu 1

Označme si vlka V, kozu K, kapustu figurálne o a človeka (neodlúčiteľne zviazaného s člnkom) $\check{\mathrm{C}}$. V každom okamihu je každý z týchto objektov na nejakom mieste. To by sme síce mohli presne popísať trebárs GPS súradnicami, uvedomme si však, že v skutočnosti stačí evidovať len to, či je objekt na východiskovom brehu, na rieke v člnku, alebo alebo na opačnom brehu. V každom časovom okamihu t tak môžeme našu množinu $M = \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}$ rozdeliť na disjunktné množiny P_t, R_t a D_t, ktoré budú obsahovať tie objekty, ktoré sa v tomto okamihu nachádzajú (postupne) na pôvodnom brehu, v rieke, respektíve na druhom brehu.

Úloha	Ak je presne po polhodine na pôvodnom brehu koza a na druhom vlk, ako vyzerajú tieto množiny?
Riešenie	Náš časový okamih t je teraz $0{,}5\,\mathrm{h}$, máme teda určiť množiny $P_{0,5\mathrm{h}}$, $R_{0,5\mathrm{h}}$, a $D_{0,5\mathrm{h}}$. Na pôvodnom brehu je podľa zadania iba koza, takže prvá z týchto množín obsahuje iba prvok K, t. j. $P_{0,5\mathrm{h}} = \{\mathrm{K}\}$. Podobne na druhom brehu je iba vlk, takže tretia množina obsahuje iba prvok V, t. j. $D_{0,5\mathrm{h}} = \{\mathrm{V}\}$. Zvyšní aktéri - prievozník $\check{\mathrm{C}}$ a kapusta o - sa musia nachádzať v rieke, ktorej zodpovedá druhá množina, t. j. $R_{0,5\mathrm{h}} = \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}\}$. Všimnime si tiež, že každé dve z týchto troch množín sú disjunktné (t. j. nemajú žiaden spoločný prvok), a každý prvok množiny M sa však nachádza v práve jednej z nich.

Každá z množín P_t, R_t a D_t je teda nejakou podmnožinou množiny M, čiže jednou z týchto šestnástich množín:

$$\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\},\ \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}\},\ \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\},\ \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\},\ \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}\},\ \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{K}\},\ \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}\},\ \{\check{\mathrm{C}}\},$$

$$\{\mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\},\ \{\mathrm{V}, \mathrm{K}, \},\ \{\mathrm{V}, \mathrm{o}\},\ \{\mathrm{K}, \mathrm{o}\},\ \{\mathrm{V}\},\ \{\mathrm{K}\},\ \{\mathrm{o}\},\ \emptyset.$$

Prvých osem je vzhľadom na prievozníka, ktorý má situáciu pod kontrolou, bezproblémových, starosti nám však robia množiny $\{\mathrm{V}, \mathrm{K}\}$ - to by vlk zožral kozu -, $\{\mathrm{K}, \mathrm{o}\}$ - to by koza zožrala kapustu -, ale ani $\{\mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}$ - to by sme možno aj mali akciu tri v jednom ;-). Nazvime tieto množiny zakázané. V žiadnom okamihu t sa teda žiadna z množín P_t, R_t a D_t nemôže rovnať jednej z týchto troch zakázaných podmnožín M. Pri R_t je táto podmienka splnená automaticky, veď tá je buď prázdna (to je vtedy, keď je člnok na niektorom brehu), alebo v prípade neprázdnosti (vzhľadom na kapacitu člnka) najviac dvojprvková, pričom jeden prvok je vtedy určite $\check{\mathrm{C}}$. Stačí teda požadovať splnenie tohto obmedzenia pre množiny P_t a D_t.

Uvedomme si však jeden zásadný problém: časových okamihov, v ktorých musí byť táto podmienka splnená, je nekonečne veľa. Naozaj ju však musíme kontrolovať v každom z nich? Všimnime si, že keď sa nejaká čiastková plavba začína v čase t_1 a končí v čase t_2, tak pre každý časový okamih t z (otvoreného) intervalu (t_1, t_2) platí:

- Množina P_t sa nemení a je rovná množine P_{t_2}, t. j. stavu na konci tejto plavby.
- Množina R_t sa nemení a (ako sme videli) nie je rovná žiadnej zakázanej podmnožine.
- Množina D_t sa nemení a je rovná množine D_{t_1}, t. j. stavu na začiatku tejto plavby.

Úloha	Predpokladajme, že vlk je už na druhom brehu a prievozník práve z pôvodného brehu preváža kozu. Prevoz začal v čase 35 minút a skončí ho v čase 40 minút. Ako v tomto časovom intervale vyzerajú naše množiny?
Riešenie	Najprv si uvedomme, že v tomto prípade $t_1 = 35\,\mathrm{min}$ a $t_2 = 40\,\mathrm{min}$. Na začiatku prevozu je prievozník s kapustou ešte na pôvodnom brehu, kde je aj (zatiaľ nespomínaná) koza, na druhom brehu čaká vlk, v rieke teda zatiaľ ešte nie je nikto. Platí teda $P_{35\mathrm{min}} = \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}, \mathrm{K}\}$, $R_{35\mathrm{min}} = \emptyset$ a $D_{35\mathrm{min}} = \{\mathrm{V}\}$. Na konci prevozu je už prievozník s kapustou na druhom brehu pri vlkovi, koza ostala na pôvodnom. Platí teda $P_{40\mathrm{min}} = \{\mathrm{K}\}$, $R_{40\mathrm{min}} = \emptyset$ a $D_{40\mathrm{min}} = \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}, \mathrm{V}\}$. Všimnime si teraz niektorý okamih t z intervalu $(35\,\mathrm{min}, 40\,\mathrm{min})$ (napríklad $t = 37\,\mathrm{min}\,14\,\mathrm{s}$). Vtedy je prievozník s kapustou kdesi v rieke, koza je na pôvodnom brehu a vlk na druhom, takže $P_t = \{\mathrm{K}\} = P_{40\mathrm{min}}$, $R_t = \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}\}$ a $D_t = \{\mathrm{V}\} = D_{35\mathrm{min}}$.

Ak teda nastane problém (v zmysle rovnosti niektorej zakázanej podmnožine) niekde uprostred čiastkovej plavby, ten istý problém už musel nastať na začiatku tejto plavby, alebo nastane aj na jej konci. Ekvivalentne (obmenou) sformulované, ak problém nenastane v okamihu začiatku ani v okamihu konca čiastkovej plavby, nenastane ani v jej priebehu. To však pre nás znamená, že našu podmienku nemusíme kontrolovať v každom okamihu, stačí sa obmedziť iba na okamihy začiatkov, resp. koncov čiastkových plavieb. A tých je len (pri akomkoľvek spôsobe preplavovania) len konečne veľa.

A ešte jedno podobné zjednodušenie: Ak t_1 je okamih konca jednej čiastkovej plavby a t_2 okamih začiatku čiastkovej plavby vzápätí nasledujúcej, platí $P_{t_1} = P_{t_2}$, $D_{t_1} = D_{t_2}$ a $R_{t_1} = R_{t_2} = \emptyset$. To nám umožňuje všímať si len napr. začiatky čiastkových plavieb (a navyše, samozrejme, koniec poslednej).

Úloha	Keď sa prievozník po predchádzajúcej plavbe dostane na druhý breh, za ďalšiu minútu vyloží kapustu a naloží vlka. Ako potom budú vyzerať príslušné množiny v (uzavretom) intervale $[40\,\mathrm{min}, 41\,\mathrm{min}]$?

Riešenie

Z predošlej úlohy už vieme, že $P_{40\mathrm{min}} = \{\mathrm{K}\}$, $R_{40\mathrm{min}} = \emptyset$ a $D_{40\mathrm{min}} = \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}, \mathrm{V}\}$. Nasledujúcu minútu prievozník vykladá a nakladá členov posádky. Mení tak obsah člnka, ktorý však, keďže je zrejme priviazaný k brehu, môžeme považovať za jeho dočasnú súčasť. Pre každý okamih t z intervalu $[40\,\mathrm{min}, 41\,\mathrm{min}]$ teda platí $P_t = \{\mathrm{K}\} = P_{40\mathrm{min}}$, $R_t = \emptyset = R_{40\mathrm{min}}$ a $D_t = \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}, \mathrm{V}\} = D_{40\mathrm{min}}$.

Každý z takýchto okamihov t je teda popísateľný usporiadanou dvojicou spomínaných množín $\langle P_t, D_t \rangle$. Pripomeňme, že R_t je prázdna, možno ju teda úplne ignorovať. Navyše to znamená, že $P_t \cup D_t = M$, pričom, zopakujme, $P_t \cap D_t = \emptyset$. Na popis situácie by teda stačila samotná množina P_t (množina D_t je predsa jej doplnok M), kvôli prehľadnosti však budeme uvádzať obe množiny.

Načrtnime všetky situácie – budeme ich nazývať stavy –, pričom (kvôli prehľadnosti) vľavo umiestnime možnosti, v ktorých je $\check{\mathrm{C}}$ na pôvodnom brehu (čiže v prvej zložke), a vpravo možnosti, v ktorých je $\check{\mathrm{C}}$ na druhom brehu (čiže v druhej zložke):

$\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}, \emptyset\rangle$ •	• $\langle\{\mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}, \{\check{\mathrm{C}}\}\rangle$
$\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}\}, \{\mathrm{o}\}\rangle$ •	• $\langle\{\mathrm{V}, \mathrm{K}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}\}\rangle$
$\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\}, \{\mathrm{K}\}\rangle$ •	• $\langle\{\mathrm{V}, \mathrm{o}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{K}\}\rangle$
$\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}, \{\mathrm{V}\}\rangle$ •	• $\langle\{\mathrm{K}, \mathrm{o}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}\}\rangle$
$\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}\}, \{\mathrm{K}, \mathrm{o}\}\rangle$ •	• $\langle\{\mathrm{V}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}\rangle$
$\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{K}\}, \{\mathrm{V}, \mathrm{o}\}\rangle$ •	• $\langle\{\mathrm{K}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\}\rangle$
$\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{o}\}, \{\mathrm{V}, \mathrm{K}\}\rangle$ •	• $\langle\{\mathrm{o}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}\}\rangle$
$\langle\{\check{\mathrm{C}}\}, \{\mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}\rangle$ •	• $\langle\emptyset, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}\rangle$

V ďalšej fáze odstránime tie stavy, ktoré porušujú deklarovanú podmienku, čiže také, ktorých prvá alebo druhá zložka je zakázaná, t. j. jedna z $\{\mathrm{V}, \mathrm{K}\}$, $\{\mathrm{K}, \mathrm{o}\}$ alebo $\{\mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}$:

Úloha

Z predchádzajúceho obrázku odstráňte takéto neprípustné stavy.

Medzi niektorými z týchto stavov existujú tzv. prechody: Napríklad zo stavu $\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\}, \{\mathrm{K}\}\rangle$ (t. j. keď je na pôvodnom brehu prievozník s vlkom a kapustou, kým koza je na druhom brehu) sa možno dostať do stavu $\langle\{\mathrm{V}, \mathrm{o}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{K}\}\rangle$ (t. j. keď je na pôvodnom brehu vlk a kapusta a na druhom prievozník s kozou), a to jednoducho tak, že človek sa sám preplaví na druhý breh.

Úloha

Sú medzi nasledujúcimi stavmi prechody? Ak áno, akým plavbám zodpovedajú?

1. Zo stavu $\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}\}, \{\mathrm{o}\}\rangle$ do stavu $\langle\{\mathrm{K}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\}\rangle$.
2. Zo stavu $\langle\{\mathrm{K}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\}\rangle$ do stavu $\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}\}, \{\mathrm{o}\}\rangle$.
3. Zo stavu $\langle\{\mathrm{K}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\}\rangle$ do stavu $\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{K}, \mathrm{o}\}, \emptyset\rangle$.
4. Zo stavu $\langle\{\mathrm{K}\}, \{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}, \mathrm{o}\}\rangle$ do stavu $\langle\{\check{\mathrm{C}}, \mathrm{V}\}, \{\mathrm{K}, \mathrm{o}\}\rangle$.

Riešenie 1.	Na začiatku plavby sú na pôvodnom brehu prievozník, vlk a koza, na druhom je osamotená kapusta. Na konci plavby na druhom brehu ku kapuste pribudli prievozník s vlkom, z pôvodného títo dvaja odbudli – ostala tam len koza. Znamená to, že účastníkmi plavby boli prievozník a vlk a plavili sa z pôvodného brehu na druhý.
Riešenie 2.	Ako vidíme, tu sú stavy navzájom vymenené. Na začiatku je na pôvodnom brehu koza, na druhom prievozník, vlk a kapusta. Na konci na pôvodnom brehu ku koze pribudli prievozník s vlkom, z druhého tak, samozrejme, odbudli – ostala tam len kapusta. Účastníkmi plavby teda boli opäť prievozník a vlk, ale tentoraz sa plavili opačným smerom.
Riešenie 3.	Na začiatku je pôvodnom brehu koza, na konci tam majú byť všetci. Znamená to, že účastníkmi predpokladanej plavby boli okrem prievozníka aj vlk a kapusta, čo však vzhľadom na kapacitu člnka nie je možné. Prechod medzi stavmi $\langle\{\mathrm{K}\},\{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V},\mathrm{o}\}\rangle$ a $\langle\{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V},\mathrm{K},\mathrm{o}\},\emptyset\rangle$ teda neexistuje.
Riešenie 4.	Na začiatku je pôvodnom brehu koza, na konci tam majú byť iba prievozník a vlk. Kam teda zmizla koza? Ani medzi stavmi $\langle\{\mathrm{K}\},\{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V},\mathrm{o}\}\rangle$ a $\langle\{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V}\},\{\mathrm{K},\mathrm{o}\}\rangle$ teda prechod neexistuje.

Vedeli by sme existenciu takéhoto prechodu vyjadriť nejakou podmienkou? Označme prvý stav $\langle P_1, D_1\rangle$ a druhý $\langle P_2, D_2\rangle$ a rozlíšme dve možnosti smeru plavby:

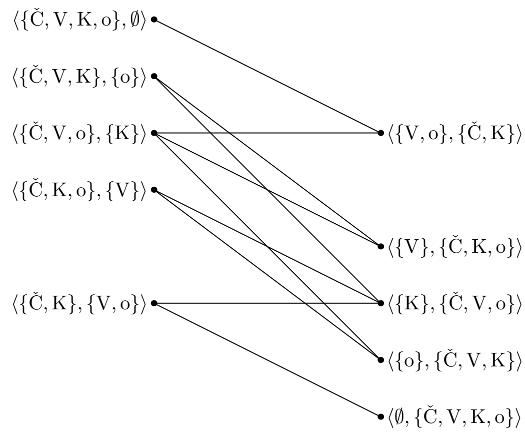
1 Ak plavba smeruje z pôvodného brehu na druhý, jej účastníkom musí byť prievozník, čo znamená, že na začiatku je na pôvodnom brehu (matematicky to vyjadríme vzťahom $\check{\mathrm{C}} \in P_1$) a na konci na druhom (t. j. $\check{\mathrm{C}} \in D_2$, resp. ekvivalentne $\check{\mathrm{C}} \notin P_2$). Po tejto plavbe sa množina P_1 objektov na pôvodnom brehu na začiatku plavby zmenší, množina P_2 objektov na pôvodnom brehu tak bude podmnožinou P_1 (t. j. $P_2 \subseteq P_1$). S prievozníkom sa môže plaviť najviac jeden ďalší pasažier, celá posádka (čo je vlastne rozdiel $P_1 \setminus P_2$ množín P_1 a P_2) má preto jedného alebo dvoch členov (matematicky vyjadrené $1 \leq |P_1 \setminus P_2| \leq 2$).

2

Úloha	Rozoberte analogicky druhú možnosť a matematicky sformulujte príslušné podmienky.
Riešenie	Stačí zameniť úlohu brehov (teda namiesto P_i písať D_i). Dostávame $\check{\mathrm{C}} \in D_1$, $\check{\mathrm{C}} \notin D_2$, $D_2 \subseteq D_1$ a $1 \leq |D_1 \setminus D_2| \leq 2$. Vzhľadom na vzťah medzi množinami P_i a D_i tieto podmienky môžeme ekvivalentne preformulovať na tvar $\check{\mathrm{C}} \notin P_1$, $\check{\mathrm{C}} \in P_2$, $P_2 \supseteq P_1$ a $1 \leq |P_2 \setminus P_1| \leq 2$.

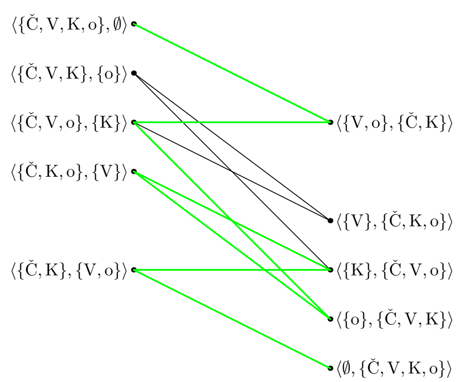
Úloha	Zistite, či tieto podmienky platia alebo neplatia pri dvojiciach stavov z predpredchádzajúcej úlohy.
Riešenie 1.	Keďže $P_1 = \{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V},\mathrm{K}\}$ a $P_2 = \{\mathrm{K}\}$, platí $\check{\mathrm{C}} \in P_1$, $\check{\mathrm{C}} \notin P_2$, $P_2 \subseteq P_1$ a $P_1 \setminus P_2 = \{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V}\}$, takže $1 \leq |P_1 \setminus P_2| = 2 \leq 2$. Podmienky sú teda splnené, a to pre plavbu tam.
Riešenie 2.	Keďže $P_1 = \{\mathrm{K}\}$ a $P_2 = \{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V},\mathrm{K}\}$, platí $\check{\mathrm{C}} \notin P_1$, $\check{\mathrm{C}} \in P_2$, $P_2 \supseteq P_1$ a $P_2 \setminus P_1 = \{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V}\}$, takže $1 \leq |P_2 \setminus P_1| = 2 \leq 2$. Podmienky sú teda aj tu splnené, avšak pre plavbu späť.
Riešenie 3.	Keďže $P_1 = \{\mathrm{K}\}$ a $P_2 = \{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V},\mathrm{K},\mathrm{o}\}$, platí $\check{\mathrm{C}} \notin P_1$. Podmienka pre plavbu tam teda nie je splnená, ako je to s druhou? Vzťahy $\check{\mathrm{C}} \notin P_1$, $\check{\mathrm{C}} \in P_2$ a $P_2 \supseteq P_1$ síce platia, ale $P_2 \setminus P_1 = \{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V},\mathrm{K}\}$, takže $|P_2 \setminus P_1| = 3$. Podmienka $1 \leq |P_2 \setminus P_1| \leq 2$ teda nie je splnená, nemôže teda ísť ani o plavbu späť.
Riešenie 4.	Keďže $P_1 = \{\mathrm{K}\}$ a $P_2 = \{\check{\mathrm{C}},\mathrm{V}\}$, neplatí ani $P_1 \subseteq P_2$, ani $P_1 \supseteq P_2$. Nie je to teda plavba ani tam, ani naspäť.

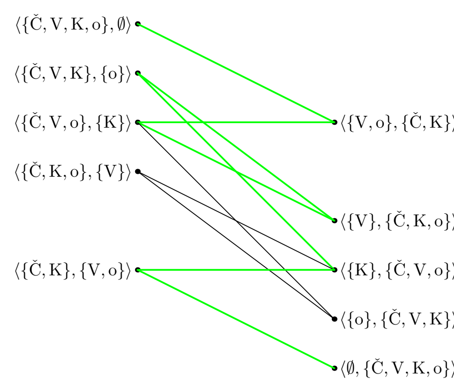
Ako sme si mohli všimnúť pri predchádzajúcich úlohách, ak je možný prechod zo stavu $\langle P_1, D_1 \rangle$ do stavu $\langle P_2, D_2 \rangle$, je možný aj opačný prechod, čiže z $\langle P_2, D_2 \rangle$ do $\langle P_1, D_1 \rangle$ (plavba je totiž vratný dej). Čiara medzi týmito dvoma stavmi, ktorou budeme na obrázku takýto prechod znázorňovať, teda nebude potrebovať orientáciu. Navyše sme prezieravým rozmiestnením stavov docielili, že každá z čiar má oba konce na opačných stranách. Aplikovaním pred chvíľou sformulovanej podmienky tak dostávame nasledujúci obrázok:



Počiatočný stav znamená, že všetky štyri objekty sú na pôvodnom brehu, je to teda $\langle\{\check{C}, V, K, o\}, \emptyset\rangle$. Naopak, stav, do ktorého sa potrebujeme dostať, je $\langle\emptyset, \{\check{C}, V, K, o\}\rangle$, vtedy je už všetko na druhom brehu. Ako vieme, čiary medzi stavmi znamenajú prechody, teda jednotlivé možné plavby. Naším cieľom je teda nájsť postupnosť stavov $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ takú, že $s_0 = \langle\{\check{C}, V, K, o\}, \emptyset\rangle$, $s_n = \langle\emptyset, \{\check{C}, V, K, o\}\rangle$ a pre každé i z množiny $\{1, \ldots, n\}$ existuje medzi s_{i-1} a s_i čiara. Navyše môžeme predpokladať, že táto postupnosť stavov je prostá, teda že sa v nej žiadny stav neopakuje.

Z obrázku ľahko vidieť, že takéto cesty sú dve:





Tieto dve cesty však nie sú v pravom zmysle riešeniami našej pôvodnej úlohy, tie vzniknú až ich spätnou interpretáciou. Tá nám už, našťastie, nebude robiť veľký problém, pretože podľa predchádzajúcej analýzy dobre vieme, čo znamenajú jednotlivé prechody. Pod nákladom tu budeme rozumieť, koho prievozník (ako povinný člen posádky) vzal so sebou. Najprv prvá cesta:

plavba	začiatok	koniec	smer	náklad	slovné vyjadrenie
1	$\langle\{\check{C}, V, K, o\}, \emptyset\rangle$	$\langle\{V, o\}, \{\check{C}, K\}\rangle$	$\rightarrow$	K	človek preplaví na druhý breh kozu
2	$\langle\{V, o\}, \{\check{C}, K\}\rangle$	$\langle\{\check{C}, V, o\}, \{K\}\rangle$	$\leftarrow$	-	človek sa preplaví na pôvodný breh sám
3	$\langle\{\check{C}, V, o\}, \{K\}\rangle$	$\langle\{o\}, \{\check{C}, V, K\}\rangle$	$\rightarrow$	V	človek preplaví na druhý breh vlka
4	$\langle\{o\}, \{\check{C}, V, K\}\rangle$	$\langle\{\check{C}, K, o\}, \{V\}\rangle$	$\leftarrow$	K	človek preplaví na pôvodný breh kozu
5	$\langle\{\check{C}, K, o\}, \{V\}\rangle$	$\langle\{K\}, \{\check{C}, V, o\}\rangle$	$\rightarrow$	o	človek preplaví na druhý breh kapustu
6	$\langle\{K\}, \{\check{C}, V, o\}\rangle$	$\langle\{\check{C}, K\}, \{o, V\}\rangle$	$\leftarrow$	-	človek sa preplaví na pôvodný breh sám
7	$\langle\{\check{C}, K\}, \{o, V\}\rangle$	$\langle\emptyset, \{\check{C}, V, K, o\}\rangle$	$\rightarrow$	K	človek preplaví na druhý breh kozu

Úloha	Vytvorte analogickú tabuľku pre druhú cestu.

Všimnime si, že pri prvej ceste (ale rovnako i pre druhej) vykonal každý pasažier nepárny počet plavieb – ako vidíme z prvého stĺpca, prievozník ich urobil sedem, z piateho stĺpca zas môžeme vyčítať, že vlk a kapusta cestovali raz a koza trikrát. Uvedomme si, že toto pozorovanie je v plnom súlade s faktom, že každý napokon zmenil breh, teda s akýmsi „zákonom (ne)zachovania parity“.

1.6. Metóda riešenia prievozníckych úloh

Na rozdiel od bežného riešiteľa považuje informatik akýkoľvek hlavolam za skutočne vyriešený až vtedy, keď nájde algoritmus na riešenie ďalších problémov rovnakého typu. Najneskôr pri riešení piateho sudoku či maľovanej krížovky si všimne, že myšlienok riešenia nie je príliš veľa, zákonite sa teda opakujú, a jeho informatická myseľ, citlivá na jednu zo základných vlastností algoritmu – hromadnosť, sa (vedomo či podvedomo) začne zaoberať tým, ako by proces riešenia toho-ktorého hlavolamu zautomatizoval. Riešiteľ-informatik je skrátka uspokojený až vtedy, keď (jeho program) vie vyriešiť *každé* sudoku či *každú* maľovanú krížovku. To však často znamená prvotnú investíciu do nájdenia a hlavne sformalizovania algoritmu.

Podobne sme postupovali aj my. Náš prvý pokus o riešenie príkladu 1 bol síce úspešný, ale dôvodom tohto úspechu bola hlavne jeho principiálna jednoduchosť – jediný zdanlivý zádrheľ v skutočnosti (ako sme mohli vidieť) zádrheľom vôbec nebol. Jednoducho, mali sme šťastie. Pokus o riešenie príkladu 2 takýmto ad hoc spôsobom už pravdepodobne tak jednoznačne k úspechu neviedol. Vrátili sme sa preto k už vyriešenému príkladu 1 a vyriešili sme ho nanovo, tentoraz však s vyššími ambíciami, a to vytvoriť celú metodiku riešenia problémov podobného typu – tzv. prievozníckych úloh. Pokúsme sa ju sformulovať:

1 Zvolíme vhodnú dátovú reprezentáciu na popísanie jednotlivých stavov.

2 Množinu stavov diskretizujeme, aby bola konečná. Obvykle ide o zredukovanie množiny stavov na tie, pri ktorých sú všetci účastníci na niektorom z brehov (a teda rieka je prázdna). Takáto redukcia spôsobí aj zjednodušenie dátovej štruktúry odobratím už irelevantnej informácie o situácii na rieke.

3 Sformulujeme (a sformalizujeme) podmienku prípustnosti stavov a jej nevyhovujúce stavy eliminujeme.

4 Sformulujeme (a sformalizujeme) prechodovú podmienku, t. j. kedy má medzi dvoma stavmi byť prechod.

5 Na vzniknutom obrázku (opticky) nájdeme cestu medzi počiatočným a koncovým stavom (prípadne spĺňajúcu ďalšie dodatočné podmienky).

6 Výslednú cestu interpretujeme v kontexte pôvodného zadania, čím získavame riešenie úlohy.

K bodu 5 treba dodať, že pri komplikovanejších úlohách môže ľudská schopnosť opticky vyhľadať cestu zlyhať. V takom prípade však aj tak celý proces riešenia radšej elektronizujeme a optické vyhľadávanie cesty nahradíme zodpovedajúcim algoritmom.

Za zmienku stojí porovnanie dĺžky oboch riešení príkladu 1. Druhé je niekoľkonásobne dlhšie, zdanlivo mu teda chýba motivácia. Tak to už s prvotnými investíciami chodí. Ďalší text však nás azda presvedčí, že sa v prípade prievozníckych úloh vyplatila.

1.7. Riešenie príkladu 2 (podľa metodiky)

1 Výber vhodnej dátovej štruktúry:

Na rozdiel od príkladu 1 tu nemáme štyri objekty, ale rovno sedem: traja kanibali, traja misionári a jeden člnok. Ak by sme chceli až príliš mechanicky prevziať riešenie príkladu 1, v ktorom sme vyberali z 2^4 možných podmnožín množiny objektov, tu by takýchto podmnožín bolo 2^7, čiže 128, čo je však na optické riešenie asi priveľa. Tu sme však predsa len v trochu inej situácii - kým predtým sme vedeli úplne rozlíšiť každý z objektov, tu jednotlivých ľudožrútov, resp. jednotlivých misionárov rozlíšiť nevieme, dôležitý je len ich počet. situáciu na každom z troch miest - pôvodný breh, rieka a druhý breh - teda budeme popisovať nie podmnožinou objektov ako predtým, ale usporiadanou trojicou $\langle k, m, c\rangle$, kde k je počet kanibalov, m je počet misionárov a c počet člnkov, pričom podľa zadania je $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ a $c \in \{0, 1\}$. Stav teda bude popísaný usporiadanou trojicou takýchto trojíc

$$\langle\langle k_1, m_1, c_1\rangle, \langle k_2, m_2, c_2\rangle, \langle k_3, m_3, c_3\rangle\rangle,$$

kde prvá zložka popisuje situáciu na pôvodnom brehu, druhá na rieke a tretia na druhom brehu. Podľa zadania pritom platia vzťahy:

- $k_1 + k_2 + k_3 = 3$ (celkovo sú kanibali traja),
- $m_1 + m_2 + m_3 = 3$ (celkovo sú aj misionári traja),
- $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ (člnok je jediný).

2 Diskretizácia stavového priestoru:

Môžeme tu v podstate doslova zopakovať myšlienku z príkladu 1, že ak nenastane problém v tých časových okamihoch, keď je člnok na niektorom z brehov, nenastane ani vtedy, keď je na rieke. Ani tu totiž nemôže na samotnej rieke nastať sitácia, že by počet ľudožrútov prevážil nenulový počet misionárov, veď člnok je iba dvojmiestny. To pre nás znamená zjednodušenie dátovej štruktúry na

$$\langle\langle k_1, m_1, c_1\rangle, \langle k_2, m_2, c_2\rangle\rangle,$$

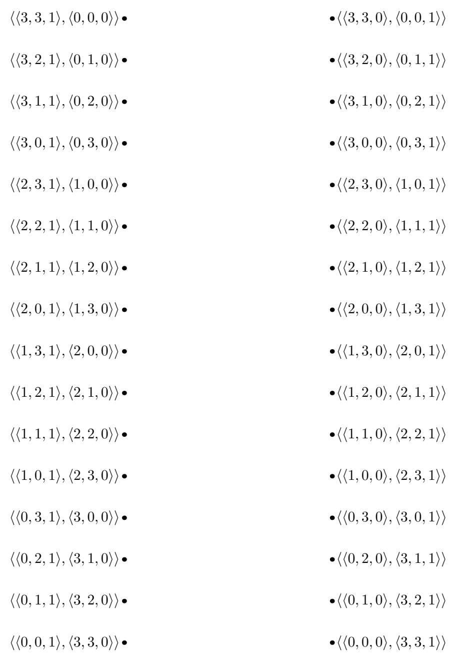
kde prvá zložka popisuje situáciu na pôvodnom a druhá na druhom brehu, pričom platia vzťahy:

- $k_1 + k_2 = 3$,
- $m_1 + m_2 = 3$,
- $c_1 + c_2 = 1$.

Inými slovami, stačí poznať situáciu na pôvodnom brehu, t. j. hodnoty k_1, m_1 a c_1, celkový stav je potom $\langle\langle k_1, m_1, c_1\rangle, \langle 3 - k_1, 3 - m_1, 1 - c_1\rangle\rangle$. Napriek tomu však kvôli prehľadnosti budeme explicitne sledovať situáciu na oboch brehoch.

Úloha	Ako bude vyzerať príslušný stav, ak sú na pôvodnom brehu traja misionári, jeden kanibal a člnok?
Riešenie	Podľa zadania je počet misionárov na pôvodnom brehu $m_1 = 3$, analogicky pre počet kanibalov na tomto brehu platí $k_1 = 1$, a keďže tam máme i člnok, máme $c_1 = 1$. Podľa predchádzajúcich úvah teda ide o stav $\langle\langle 3, 1, 1\rangle, \langle 3-3, 3-1, 1-1\rangle\rangle$, čiže $\langle\langle 3, 1, 1\rangle, \langle 0, 2, 0\rangle\rangle$, čo zodpovedá tomu, že na druhom brehu sú len dvaja kanibali (a navyše bez člnka).

Uvedomme si ešte, že celkový počet teoreticky možných stavov je 4 (počet možností pre počet kanibalov) $\cdot\, 4$ (počet možností pre počet misionárov) $\cdot\, 2$ (buď tam člnok je, alebo nie je), čiže 32, čo je pomerne prijateľné číslo. Podobne ako minule načrtneme stavový diagram tak, že vľavo budú stavy s člnkom na pôvodnom brehu a vpravo stavy s člnkom na druhom brehu:



3 Podmienka prípustnosti stavov:

Podľa zadania vieme, že na žiadnom mieste sa nesmie nachádzať viac ľudožrútov než misionárov. Nepopísanou, ale zrejmou výnimkou je situácia s nenulovým počtom kanibalov, ale nulovým počtom misionárov – vtedy totiž ľudožrúti aj napriek formálnej prevahe nemajú koho zjesť. Zakázané stavy sú teda tie, ktorých aspoň jedna zložka má jeden z tvarov $\langle 2,1,c\rangle$, $\langle 3,1,c\rangle$, alebo, $\langle 3,2,c\rangle$, ostatné stavy sú povolené.

Úloha	Z predchádzajúceho obrázku odstráňte zakázané stavy.

4 Prechodová podmienka:

Prechod bude opäť znamenať jednu plavbu, a to povedzme zo stavu $\langle\langle k^1, m^1, c^1\rangle, \langle 3-k^1, 3-m^1, 1-c^1\rangle\rangle$ do stavu $\langle\langle k^2, m^2, c^2\rangle, \langle 3-k^2, 3-m^2, 1-c^2\rangle\rangle$. Rozoberme obe možnosti smeru plavby:

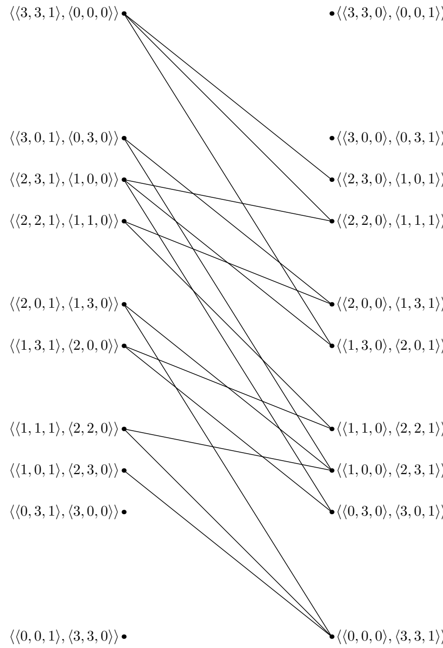
1 Ak plavba smeruje z pôvodného brehu na druhý, na pôvodnom brehu teda člnok na začiatku je - t. j. $c^1 = 1$, ale na konci nie - $c^2 = 0$. To znamená, že na našom obrázku je stav $\langle\langle k^1, m^1, c^1\rangle, \langle 3-k^1, 3-m^1, 1-c^1\rangle\rangle$ vľavo a stav $\langle\langle k^2, m^2, c^2\rangle, \langle 3-k^2, 3-m^2, 1-c^2\rangle\rangle$ vpravo.

   Počet kanibalov ani počet misionárov na pôvodnom brehu nemohol stúpnuť, platí teda $k^1 \geq k^2$ a $m^1 \geq m^2$. Plavby sa teda zúčastní $k^1 - k^2$ kanibalov a $m^1 - m^2$ misionárov. Súčet týchto počtov pritom nesmie presiahnuť kapacitu člnka, zároveň však musí byť kladný (člnok potrebuje dozor), platí teda $1 \leq (k^1 - k^2) + (m^1 - m^2) \leq 2$.

2

Úloha	Analyzujte možnosť, že ide o plavbu opačným smerom.

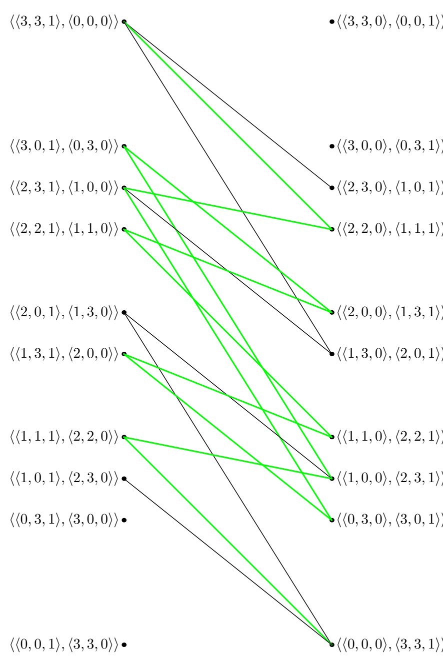
Aj tu platí, že všetky deje (plavby) sú vratné (jednoducho sa otočí člnok), teda čiary znázorňujúce prechody nebudú orientované. Navyše sme si opäť zabezpečili, že oba ich konce sú na rôznych stranách.



Všimnime si štyri stavy, z ktorých nevedie žiadna čiara. Ich existencia podmienkam úlohy neodporuje, ale, ako vidíme, z iných stavov sú nedosiahnuteľné.

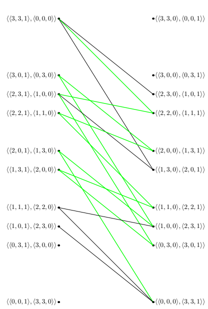
5 Hľadanie cesty:

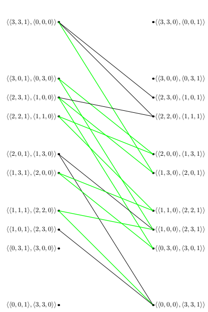
Začiatočný stav je $\langle\langle 3,3,1\rangle,\langle 0,0,0\rangle\rangle$, koncový $\langle\langle 0,0,0\rangle,\langle 3,3,1\rangle\rangle$. (Opticky hľadať cestu nie je až také jednoduché ako minule (ba pri len trochu nešťastnejšie načrtnutom obrázku takmer až nemožné), ale po dostatočnej menšej námahe sa to hádam podarí.) Tentoraz máme štyri riešenia, ukážme jedno:

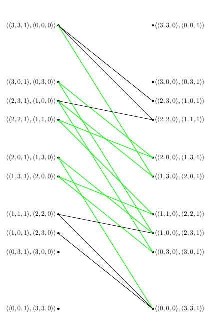


Úloha	Načrtnite ostatné riešenia.
Riešenie	Všetky tri sú v bočnom pásiku.

Všimnime si, že všetky štyri riešenia sa navzájom líšia len prvými dvoma, resp. poslednými dvoma plavbami.







6 Interpretácia:

Začneme prvou cestou. Pod posádkou budeme rozumieť obsadenie člna, t. j. usporiadanú dvojicu $\langle a, b\rangle$, kde a je počet plaviacich sa ľudožrútov a b plaviacich sa misionárov. Slovné vyjadrenie si tentoraz už odpustíme:

plavba	začiatok	koniec	smer	posádka
1	$\langle\langle 3,3,1\rangle, \langle 0,0,0\rangle\rangle$	$\langle\langle 2,2,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle\rangle$	$\rightarrow$	$\langle 1,1\rangle$
2	$\langle\langle 2,2,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle\rangle$	$\langle\langle 2,3,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle\rangle$	$\leftarrow$	$\langle 0,1\rangle$
3	$\langle\langle 2,3,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle\rangle$	$\langle\langle 0,3,0\rangle, \langle 3,0,1\rangle\rangle$	$\rightarrow$	$\langle 2,0\rangle$
4	$\langle\langle 0,3,0\rangle, \langle 3,0,1\rangle\rangle$	$\langle\langle 1,3,1\rangle, \langle 2,0,0\rangle\rangle$	$\leftarrow$	$\langle 1,0\rangle$
5	$\langle\langle 1,3,1\rangle, \langle 2,0,0\rangle\rangle$	$\langle\langle 1,1,0\rangle, \langle 2,2,1\rangle\rangle$	$\rightarrow$	$\langle 0,2\rangle$
6	$\langle\langle 1,1,0\rangle, \langle 2,2,1\rangle\rangle$	$\langle\langle 2,2,1\rangle, \langle 1,1,0\rangle\rangle$	$\leftarrow$	$\langle 1,1\rangle$
7	$\langle\langle 2,2,1\rangle, \langle 1,1,0\rangle\rangle$	$\langle\langle 2,0,0\rangle, \langle 1,3,1\rangle\rangle$	$\rightarrow$	$\langle 0,2\rangle$
8	$\langle\langle 2,0,0\rangle, \langle 1,3,1\rangle\rangle$	$\langle\langle 3,0,1\rangle, \langle 0,3,0\rangle\rangle$	$\leftarrow$	$\langle 0,2\rangle$
9	$\langle\langle 3,0,1\rangle, \langle 0,3,0\rangle\rangle$	$\langle\langle 1,0,0\rangle, \langle 2,3,1\rangle\rangle$	$\rightarrow$	$\langle 2,0\rangle$
10	$\langle\langle 1,0,0\rangle, \langle 2,3,1\rangle\rangle$	$\langle\langle 1,1,1\rangle, \langle 2,2,0\rangle\rangle$	$\leftarrow$	$\langle 0,1\rangle$
11	$\langle\langle 1,1,1\rangle, \langle 2,2,0\rangle\rangle$	$\langle\langle 0,0,0\rangle, \langle 3,3,1\rangle\rangle$	$\rightarrow$	$\langle 0,1\rangle$

Aktivita	Vyberte spomedzi seba troch misionárov a troch kanibalov ;-), a čítaním predchádzajúcej tabuľky nasimulujte celú cestu.
Úloha	Vyriešte analogickú úlohu s počtom kanibalov 4 a počtom misionárov 4.
Úloha	Ako sa môžu zmeniť počty kanibalov a misionárov, aby úloha mala riešenie?
Úloha	Vyriešte úlohu 1 za podmienky, že máte k dispozícii trojmiestnu loďku. (Pozor, kanibali môžu byť nebezpeční aj na loďke!)

1.8. Ďalšie prievoznícke úlohy

Úloha	Traja ľudia, jedna veľká opica a dve malé opice chcú prejsť cez rieku, k dispozícii však majú len jednu dvojmiestnu loďku. V žiadnom momente nemôže byť na brehu viac opíc ako ľudí (môžete hádať prečo ;-)). Veslovať vedia iba ľudia a veľká opica. Ako sa dostanú všetci na druhý breh?
Úloha	Rodičia s dvoma deťmi prišli k širokej rieke. Široko-ďaleko nebol žiaden most. Našťastie si všimli, že kúsok ďalej po prúde sedí nejaký rybár v loďke a loví ryby. Požiadali ho teda o prevoz. Rybár povedal: „Veľmi rád. Ale lodička je malá, unesie najviac jednu dospelú osobu alebo dve deti.“. Ako to majú urobiť, aby sa všetci členovia rodiny dostali na druhý breh a loďku odovzdali naspäť rybárovi?

1.9. Príklad 3

Na začiatku starého dreveného mosta stoja už za tmy štyria kamaráti, ktorým z náprotivnej strany odchádza o 17 minút posledný autobus. Napriek dravosti rieky je most veľmi chatrný – udrží najviac dvoch ľudí, dokonca sú v ňom už i nejaké diery, takže sa dá prejsť len s baterkou. Žiaľ, naši štyria priatelia majú len jednu, a navyše niektorí z nich majú zdravotný handikep: kým jeden dokáže tento most prejsť za dve minúty a druhý dokonca za minútu, tretiemu to trvá päť minút, a štvrtému dokonca desať. Ak idú po moste dvaja (čomu sa zrejme nevyhnú), rýchlejší sa, samozrejme, musí prispôsobiť tempu pomalšieho. Stihnú ten autobus?

1.10. Riešenie príkladu 3

Máme tu do činenia s piatimi objektmi, ktoré sa budú po moste premiestňovať - baterka B a štyria kamaráti K_1 s časom prechodu 1 minúta, K_2 s časom 2 minúty, K_3 s 5 minútami a K_4 s 10 minútami. Pri riešení zatiaľ sledujme vyššie uvedenú metodiku:

1 Výber vhodnej dátovej štruktúry:

Všimnime si, že naše objekty sú navzájom nezameniteľné: každý z priateľov má iný čas prejdenia a baterka na rozdiel od nich musí byť účastná na každom prechode (hrá teda úlohu člnka z predchádzajúcich úloh). Táto situácia pripomína príklad 1, kde sme situáciu na oboch brehoch i rieke reprezentovali podmnožinou základnej množiny, čo je v našom prípade $\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}$. Uvedomme si, že takýchto podmnožín je potom 2^5, teda 32.

2 Diskretizácia stavového priestoru:

Podobne ako v predchádzajúcich úlohách sa stačí zaoberať okamihmi, keď sa mení niektorá z množín objektov na niektorom brehu. Vtedy na moste nie je nikto, stačí teda evidovať len množiny objektov na brehu. V tomto prípade sa dokonca obmedzíme na množinu objektov na pôvodnom brehu, množina objektov na druhom brehu bude potom jej komplementom. Diagram stavov teda vyzerá takto:

$\langle\{B, K_1, K_2, K_3, K_4\}, \emptyset\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1, K_2, K_3, K_4\}, \{B\}\rangle$
$\langle\{B, K_1, K_2, K_3\}, \{K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1, K_2, K_3\}, \{B, K_4\}\rangle$
$\langle\{B, K_1, K_2, K_4\}, \{K_3\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1, K_2, K_4\}, \{B, K_3\}\rangle$
$\langle\{B, K_1, K_2\}, \{K_3, K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1, K_2\}, \{B, K_3, K_4\}\rangle$
$\langle\{B, K_1, K_3, K_4\}, \{K_2\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1, K_3, K_4\}, \{B, K_2\}\rangle$
$\langle\{B, K_1, K_3\}, \{K_2, K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1, K_3\}, \{B, K_2, K_4\}\rangle$
$\langle\{B, K_1, K_4\}, \{K_2, K_3\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1, K_4\}, \{B, K_2, K_3\}\rangle$
$\langle\{B, K_1\}, \{K_2, K_3, K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_1\}, \{B, K_2, K_3, K_4\}\rangle$
$\langle\{B, K_2, K_3, K_4\}, \{K_1\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_2, K_3, K_4\}, \{B, K_1\}\rangle$
$\langle\{B, K_2, K_3\}, \{K_1, K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_2, K_3\}, \{B, K_1, K_4\}\rangle$
$\langle\{B, K_2, K_4\}, \{K_1, K_3\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_2, K_4\}, \{B, K_1, K_3\}\rangle$
$\langle\{B, K_2\}, \{K_1, K_3, K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_2\}, \{B, K_1, K_3, K_4\}\rangle$
$\langle\{B, K_3, K_4\}, \{K_1, K_2\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_3, K_4\}, \{B, K_1, K_2\}\rangle$
$\langle\{B, K_3\}, \{K_1, K_2, K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_3\}, \{B, K_1, K_2, K_4\}\rangle$
$\langle\{B, K_4\}, \{K_1, K_2, K_3\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\{K_4\}, \{B, K_1, K_2, K_3\}\rangle$
$\langle\{B\}, \{K_1, K_2, K_3, K_4\}\rangle \bullet$	$\bullet\langle\emptyset, \{B, K_1, K_2, K_3, K_4\}\rangle$

3 Podmienka prípustnosti stavov:

Na rozdiel od prechádzajúcich úloh tu nepoznáme žiadne (ani latentné) konflikty medzi účastníkmi podujatia, preto ich nebudeme brať do úvahy. To však znamená, že prípustný je každý stav. (Samozrejme, niektoré sú možné iba teoreticky, napríklad ten, pri ktorom sú už všetci kamaráti na druhom brehu, ale baterka ostala na pôvodnom. Je to síce nezmysel, ale zadaniu neodporuje.)

4 Prechodová podmienka:

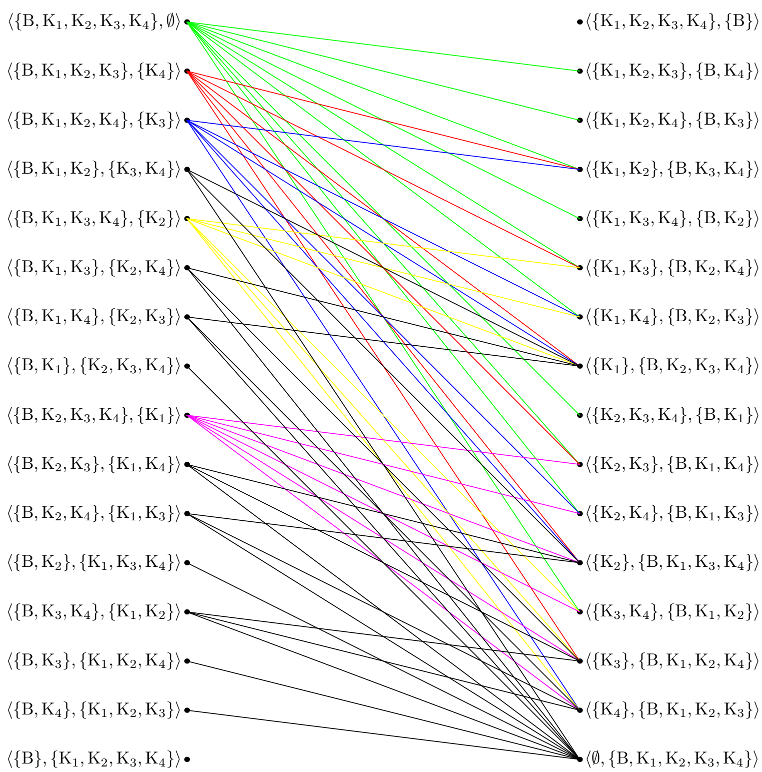
Označme R množinu objektov, ktoré sú aktérmi prechodu (tentoraz doslova prechodu - cez most) zo stavu $\langle P_1, D_1\rangle$ do stavu $\langle P_2, D_2\rangle$. Zo zadania vieme, že R určite obsahuje baterku B a okrem toho ešte aspoň jeden, ale najviac dva prvky typu K_i. Rozlíšme dve možnosti smeru prechodu:

1 Ak ide o prechod z pôvodného brehu na druhý, P_2 musí byť podmnožinou P_1 a R je práve ich rozdiel $P_1 \setminus P_2$. Keďže R obsahuje B, dostávame $\mathrm{B} \in P_1$, $\mathrm{B} \notin P_2$, čo znamená, že $\langle P_1, D_1\rangle$ je na našom obrázku vľavo a $\langle P_2, D_2\rangle$ vpravo. Navyše pre počet objektov $|R|$ prechádzajúcich cez most (včítane baterky) platí vzťah $1 \leq |R \setminus \{\mathrm{B}\}| \leq 2$.

2

Úloha	Analyzujte možnosť, že ide o prechod mosta opačným smerom.

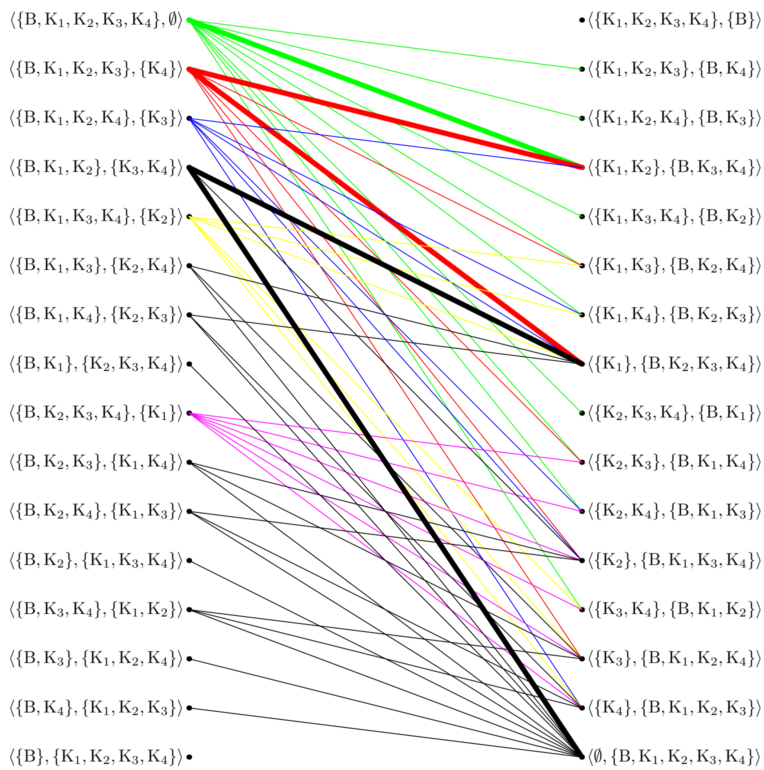
Aj v tomto prípade sú všetky deje vratné, prechody teda nebudú orientované. Dostávame obrázok:



Čiary sme radšej po rozumných skupinách podľa ľavého konca farebne rozlíšili, lebo situácia by už bez nich bola nezvládnuteľná.

5 Hľadanie cesty:

Ciest zo stavu do stavu je neúrekom, vyznačme jednu:



6 Interpretácia:

Z neho môžeme čítať (implicitnou súčasťou „posádky“ je, samozrejme, baterka B):

prechod	začiatok	koniec	smer	posádka
1	$\langle\{B, K_1, K_2, K_3, K_4\}, \emptyset\rangle$	$\langle\{K_1, K_2\}, \{B, K_3, K_4\}\rangle$	$\rightarrow$	$\{K_3, K_4\}$
2	$\langle\{K_1, K_2\}, \{B, K_3, K_4\}\rangle$	$\langle\{B, K_1, K_2, K_3\}, \{K_4\}\rangle$	$\leftarrow$	$\{K_3\}$
3	$\langle\{B, K_1, K_2, K_3\}, \{K_4\}\rangle$	$\langle\{K_1\}, \{B, K_2, K_3, K_4\}\rangle$	$\rightarrow$	$\{K_2, K_3\}$
4	$\langle\{K_1\}, \{B, K_2, K_3, K_4\}\rangle$	$\langle\{B, K_1, K_2\}, \{K_3, K_4\}\rangle$	$\leftarrow$	$\{K_2\}$
5	$\langle\{B, K_1, K_2\}, \{K_3, K_4\}\rangle$	$\langle\emptyset, \{B, K_1, K_2, K_3, K_4\}\rangle$	$\rightarrow$	$\{K_1, K_2\}$

A úloha je vyriešená!. . . Počkať! Nebolo v znení úlohy niečo s nejakými časmi? My sme však v našom riešení o časoch vôbec neuvažovali! Skontrolujme, či celkový čas našej cesty skutočne nepresiahne tých 17 minút. Podľa zadania vieme, že v každom riadku treba zarátať čas pomalšieho:

prechod	posádka	čas
1	$\{K_3, K_4\}$	10
2	$\{K_3\}$	5
3	$\{K_2, K_3\}$	5
4	$\{K_2\}$	2
5	$\{K_1, K_2\}$	2

Celkový čas je teda $10 + 5 + 5 + 2 + 2$ minút, t. j. až 24 minút. To však znamená, že naša cesta nie je riešením! Kde sme teda urobili chybu, veď sme postupovali presne podľa návodu?. . . :-(

Áno, až ale príliš presne. Netvorivo. Situácia sa totiž oproti predchádzajúcim úlohám v čomsi zmenila. Predtým nám stačilo nájsť vlastne ktorúkoľvek cestu medzi začiatočným a koncovým stavom, teraz však hľadáme v istom zmysle najkratšiu. No, vlastne sa nám to podarilo, veď žiadna cesta nemá menej než päť prechodov. Tu nám však ide o čas, pod najkratšou teda treba rozumieť tú s najmenším časom. To vlastne znamená, že každej čiare medzi stavmi bude priradená akási hodnota, ktorá bude v minútach znamenať čas prechodu príslušnej posádky cez most. Dĺžka cesty bude potom rovná súčtu ohodnotení všetkých jej hrán (ak, pravdaže, zanedbáme réžiu pri prestupovaní z mosta do prosta :-) a opačne).

Každú čiaru by sme teda mali označiť niektorou z hodnôt 10, 5, 2, alebo 1, prípadne kvôli prehľadnosti hrany prefarbiť tentoraz už iba štyrmi farbami tak, aby každá z nich znamenala inú hodnotu. Tým sa však počet ciest nezmení. . .

Doteraz sme mohli ťažiť z výhody, ktorú nám obrázok poskytoval práve tým, že bol obrázkom – riešenie sme mohli nájsť pomocou svojho zraku, ktorý je na hľadanie súvislých línií cvičený od narodenia. Tu však už nejde o nájdenie nejakej cesty, tých je tam dosť. Máme medzi nimi nájsť najkratšiu, a v tom nám naše oči asi už nepomôžu. Musíme na to ísť nejako inak. . .

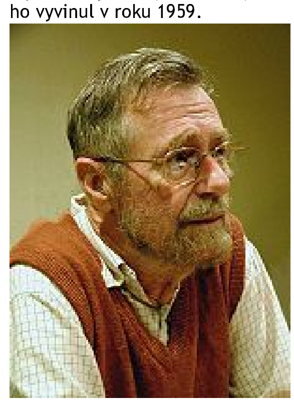
Uvedomme si, že dĺžka najkratšej (t. j. najmenej hodnotnej) cesty je vlastne zároveň vzdialenosť koncového stavu od stavu začiatočného. Dokonca to platí aj pre ľubovoľný iný stav z tejto cesty. Tento fakt nám pomôže vybŕdnuť z problémov: Stačí totiž nájsť vzdialenosti všetkých stavov k počiatočnému stavu s_0, a výslednú cestu už potom ľahko zrekonštruujeme.

Ale ako tie vzdialenosti nájsť? Pri každom stave si budeme udržiavať informáciu o dĺžke doteraz najkratšej cesty k nemu (od počiatočného stavu), a ak v priebehu procesu nájdeme ešte kratšiu, zaktualizujeme ju. Za predpokladu, že sa počas tohto procesu stretneme s každou cestou, na jeho konci budeme mať pri každom stave dĺžku definitívne najkratšej cesty, t. j. jeho vzdialenosť od počiatku.

Uvedomme si, čo sa pri nájdení kratšej cesty vlastne udeje: Nech s je ľubovoľný stav a jeho hodnota nech je x. Nech t je jeho sused s hodnotou y taký, že dĺžka cesty, ktorá vznikne z najkratšej cesty z počiatočného stavu do stavu s predĺžením o čiaru kladnej dĺžky h medzi stavmi s a t, je menšia než y. To teda znamená, že hodnotu v stave t treba zmenšiť na $y' = x + h$. Z toho dostávame $x < x + h = y' < y$, čiže ako stará, tak nová hodnota v stave t je väčšia než hodnota v stave s.

Množina tých stavov, ktorých hodnoty nepresahujú hodnotu v stave s, sa teda pri nájdení žiadnej kratšej cesty s predposledným stavom s nijako nezmení. Takže ak budeme postupovať tak, že stav s budeme vyberať podľa aktuálnych hodnôt postupne od najmenšej k najväčšej, hodnoty už prebratých stavov sa už meniť nebudú – môžeme ich považovať za definitívne, teda sú to vzdialenosti. Môžeme preto sformulovať algoritmus: Pri každom stave si budeme udržiavať hodnotu doteraz najkratšej cesty i informáciu, či je táto hodnota prechodná alebo definitívna. Pred začiatku každú hodnotu nastavíme na ∞ a budeme ju považovať za prechodnú. Vzápätí prestavíme hodnotu počiatočného stavu na 0. Potom už v postupujeme iteratívne, v rámci jednej iterácie vykonáme tieto úkony:

Tento algoritmus nesie meno holandského informatika Edsgera Wybeho Dijkstru (1930–2002), ktorý ho vyvinul v roku 1959.



(zdroj obrázka: http://en.wikipedia.org/wiki/Edsger_Dijkstra)

1 Nájdeme najmenšiu prechodnú hodnotu x (ak ešte existuje).

2 Jeden zo stavov s prechodnou hodnotou x označíme s (nedeterminizmus tu hrozí iba zdanlivo, pretože poradie výberu v prípade takéhoto konfliktu môže byť určené dopredu) a jeho hodnotu prehlásime za definitívnu.

3 Označíme t_1, . . . , t_k tých susedov s, ktorí majú zatiaľ len prechodnú hodnotu, tieto ich hodnoty označíme postupne y_1, . . . , y_k a dĺžky čiar z s k nim postupne h_1, . . . , h_k. Pre každé i z $\{1, \ldots, k\}$ potom v prípade $y_i > x + h_i$ zmeníme hodnotu v stave t_i z y_i na $x + h_i$, inak túto hodnotu nemeníme.

Keďže v každom kroku meníme na definitívnu práve jednu hodnotu, spolu vykonáme práve toľko iterácií, koľko je stavov. (Hoci v našom prípade by stačilo získať definitívnu hodnotu v koncovom stave.)

Vykonajme aspoň prvých pár krokov:

- Počiatočný stav $\langle \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \emptyset \rangle$ má najmenšiu hodnotu 0, bude teda definitívna. Prejdime všetkých jeho susedov (každý z nich má zatiaľ len prechodnú hodnotu):

  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+10=10$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_3\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_4\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+10=10$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+5=5$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_4\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+10=10$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_3\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+5=5$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+2=2$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_4\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+10=10$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_3\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+5=5$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_2\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+2=2$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_1\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $0+1=1$.

- Najmenšia prechodná hodnota je teraz 1, má ju iba stav $\langle\{\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_1\}\rangle$. Odteraz bude táto hodnota definitívna. Jeho jediným susedom je počiatočný stav, toho hodnota je však už definitívna.

- Ďalšia najmenšia prechodná hodnota je 2, a to (okrem iného) pri stave $\langle\{\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{B},\mathrm{K}_1\}\rangle$. Odteraz bude aj táto hodnota definitívna. Aj tu je jediným susedom počiatočný stav, ten sa už však meniť nebude.

- Najmenšia prechodná hodnota je stále 2, má ju stav $\langle\{\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\ \{\mathrm{B},\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2\}\rangle$. Vyhlásime teda túto jeho hodnotu za definitívnu a vyšetríme jeho susedov s prechodnými hodnotami:

  - Stavu $\langle\{\mathrm{B},\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{K}_2\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $2+1=3$.
  - Stavu $\langle\{\mathrm{B},\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4\},\{\mathrm{K}_1\}\rangle$ sa zmení hodnota ∞ na hodnotu $2+2=4$.

Úloha	Urobte ešte jednu iteráciu.

Celý postup znázorníme v nasledujúcej tabuľke: V jej riadkoch sú informácie o hodnotách jednotlivých stavoch, stĺpce zodpovedajú jednotlivým iteráciám algoritmu. Kvôli lepšej čitateľnosti tejto tabuľky sme políčka, kde by mala byť hodnota ∞, nechali prázdne. Na rozdiel od prechodných hodnôt sú definitívne hodnoty tučným písmom. Červeným písmom je v každom iteračnom stĺpci zobrazená tá hodnota, ktorá sa práve mení z prechodnej na definitívnu (všimnime si, že je vo svojom stĺpci v súlade s popisom algoritmu najmenšia). Hodnoty susedov jej stavu, ktorí ešte majú len prechodnú hodnotu (a teda o nich zisťujeme, či sme k nim práve nenašli kratšiu cestu), sú označení zelenou farbou. Hviezdička pri niektorých hodnotách znamená, že dĺžka práve nájdenej cesty a dĺžka doteraz najkratšej existujúcej cesty sú rovnaké.

stav	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	...
$\langle\{B, K_1, K_2, K_3, K_4\}, \emptyset\rangle$	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	...
$\langle\{B, K_1, K_2, K_3\}, \{K_4\}\rangle$																15	12	11	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	...
$\langle\{B, K_1, K_2, K_4\}, \{K_3\}\rangle$									7	6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	...
$\langle\{B, K_1, K_2\}, \{K_3, K_4\}\rangle$																					15	15	15	*15	**15**	**15**	**15**	...
$\langle\{B, K_1, K_3, K_4\}, \{K_2\}\rangle$					3	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	...
$\langle\{B, K_1, K_3\}, \{K_2, K_4\}\rangle$																					16	14	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	...
$\langle\{B, K_1, K_4\}, \{K_2, K_3\}\rangle$												9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	...
$\langle\{B, K_1\}, \{K_2, K_3, K_4\}\rangle$																											18	...
$\langle\{B, K_2, K_3, K_4\}, \{K_1\}\rangle$					4	4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	...
$\langle\{B, K_2, K_3\}, \{K_1, K_4\}\rangle$																						15	15	15	15	**15**	**15**	...
$\langle\{B, K_2, K_4\}, \{K_1, K_3\}\rangle$												10	10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	...
$\langle\{B, K_2\}, \{K_1, K_3, K_4\}\rangle$																											19	...
$\langle\{B, K_3, K_4\}, \{K_1, K_2\}\rangle$												13	13	13	13	13	13	13	13	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	...
$\langle\{B, K_3\}, \{K_1, K_2, K_4\}\rangle$																											22	...
$\langle\{B, K_4\}, \{K_1, K_2, K_3\}\rangle$																											27	...
$\langle\{B\}, \{K_1, K_2, K_3, K_4\}\rangle$																												...
$\langle\{K_1, K_2, K_3, K_4\}, \{B\}\rangle$																												...
$\langle\{K_1, K_2, K_3\}, \{B, K_4\}\rangle$		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	...
$\langle\{K_1, K_2, K_4\}, \{B, K_3\}\rangle$		5	5	5	5	5	5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	...
$\langle\{K_1, K_2\}, \{B, K_3, K_4\}\rangle$		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	...
$\langle\{K_1, K_3, K_4\}, \{B, K_2\}\rangle$		2	2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	...
$\langle\{K_1, K_3\}, \{B, K_2, K_4\}\rangle$		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	...
$\langle\{K_1, K_4\}, \{B, K_2, K_3\}\rangle$		5	5	5	5	5	5	5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	...
$\langle\{K_1\}, \{B, K_2, K_3, K_4\}\rangle$						13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	...
$\langle\{K_2, K_3, K_4\}, \{B, K_1\}\rangle$		1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	...
$\langle\{K_2, K_3\}, \{B, K_1, K_4\}\rangle$		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	...
$\langle\{K_2, K_4\}, \{B, K_1, K_3\}\rangle$		5	5	5	5	5	5	5	5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	...
$\langle\{K_2\}, \{B, K_1, K_3, K_4\}\rangle$							14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	**14**	**14**	**14**	**14**	...
$\langle\{K_3, K_4\}, \{B, K_1, K_2\}\rangle$		2	2	2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	...
$\langle\{K_4\}, \{B, K_1, K_2, K_4\}\rangle$						13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	...
$\langle\{K_3\}, \{B, K_1, K_2, K_3\}\rangle$						8	8	8	8	8	*8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	...
$\langle\emptyset, \{B, K_1, K_2, K_3, K_4\}\rangle$													19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	*19	19	17	17	**17**	...

Z tabuľky vidíme, že definitívna hodnota koncového stavu, t. j. jeho vzdialenosť od počiatku, je 17, naši priatelia teda svoj autobus stihnú. Ostáva už iba zistiť, akou cestou majú ísť (uspokojíme sa s jedným riešením). To vyčítame pomerne jednoducho z tabuľky, a to spätne, od konca po začiatok:

- Najkratšiu cestu do koncového stavu sme našli v 24. iterácii (tam sa totiž pri tomto stave zmenila hodnota z 19 na 17). Znamená to, že predposledný stav hľadanej cesty je ten, ktorého hodnota bola v tejto iterácii menená na definitívnu, t. j. $\langle\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}, \{\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}\rangle$.
- Tento stav získal svoju definitívnu hodnotu 13 v 20. iterácii (hci vtedy bola ešte len prechodná), a to preto, že sme doň našli najkratšiu s predposledným stavom $\langle\{\mathrm{K}_1\}, \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}\rangle$, ktorého hodnota bola v tejto iterácii definitizovaná.
- Ten získal svoju definitívnu hodnotu 3 už v 5. iterácii, a to prostredníctvom stavu $\langle\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \{\mathrm{K}_2\}\rangle$.
- Ten získal svoju definitívnu hodnotu 2 v 4. iterácii, a to prostredníctvom stavu $\langle\{\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}\rangle$.
- A napokon, tento stav je dosiahnuteľný priamo z počiatočného stavu.

Zhrňme to do tabuľky:

prechod	začiatok	koniec	smer	posádka	čas	celkový čas
1	$\langle\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \emptyset\rangle$	$\langle\{\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}\rangle$	$\rightarrow$	$\{\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}$	2	2
2	$\langle\{\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}\rangle$	$\langle\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \{\mathrm{K}_2\}\rangle$	$\leftarrow$	$\{\mathrm{K}_1\}$	1	3
3	$\langle\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}, \{\mathrm{K}_2\}\rangle$	$\langle\{\mathrm{K}_1\}, \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}\rangle$	$\rightarrow$	$\{\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}$	10	13
4	$\langle\{\mathrm{K}_1\}, \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}\rangle$	$\langle\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}, \{\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}\rangle$	$\leftarrow$	$\{\mathrm{K}_2\}$	2	15
5	$\langle\{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}, \{\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}\rangle$	$\langle\emptyset, \{\mathrm{B}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4\}\rangle$	$\rightarrow$	$\{\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2\}$	2	17

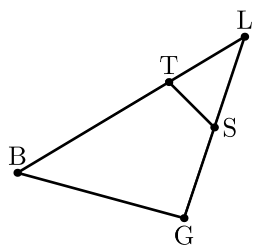
Úloha	Doplňte do veľkej tabuľky chýbajúce iterácie.
Úloha	Vyčítajte z tabuľky všetky ďalšie riešenia príkladu 3. (Využite pritom hviezdičkované hodnoty.)
Úloha	Zistite, aký čas je za rovnakých podmienok potrebný na prechod piatich ľudí s časmi prechodu (v minútach) 1, 3, 6, 8 a 12.

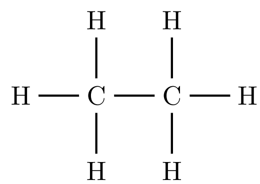
2. Grafy, ktoré nie sú grafmi funkcií

2.1. Základné pojmy

2.1.1. Oboznámenie sa s pojmom graf

Pojem graf je známy určite každému čitateľovi, avšak grafy, s ktorými budeme pracovať teraz, nie sú grafmi funkcií. Sú to kombinatorické objekty, ktoré sa veľmi dobre dajú použiť na modelovanie dopravných či počítačových sietí a s úspechom sa využívajú pri riešení mnohých praktických problémov. Na obrázku máme príklady takýchto grafov.

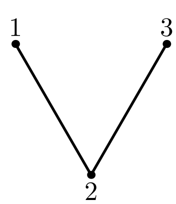


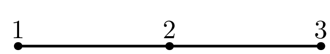


Prvý graf znázorňuje časť železničnej siete na západe Slovenska. Sú tam bodmi (budeme ich nazývať vrcholy) znázornené železničné uzly Bratislava (B), Trnava (T), Galanta (G), Sereď (S) a Leopoldov (L). Čiarami (budeme ich nazývať hrany) sú spojené tie dvojice železničných uzlov, medzi ktorými je priama železničná trať, neprerušená ďalším železničným uzlom (len poznamenajme, že za železničný uzol považujeme stanice, z ktorých chodia vlaky viac, ako dvoma smermi – železničné križovatky).

Ďalší graf na obrázku je molekula etánu, atómy sú vrcholy a väzby medzi nimi hrany.

Ako sme videli, grafy sa dajú znázorňovať obrázkami, ale v skutočnosti pri študovaní (väčšiny) vlastností grafov záleží len na tom, ktoré vrcholy sú spojené hranou a ktoré nie. Nezáleží teda na tom, či sú spojené úsečkou, alebo nejakou inou krivkou. (Napríklad nasledujúci obrázok ukazuje dva spôsoby nakreslenia toho istého grafu.)





Tento fakt sa využíva pri reprezentácii grafov na počítači. Grafy s veľkým počtom vrcholov a hrán totiž nie je veľmi výhodné kresliť pomocou obrázkov a samotné zadávanie takýchto obrázkov do počítača môže byť trochu problematické (aj keď, samozrejme, nie neriešiteľné). Môžeme ho však ekvivalentne urobiť napríklad prostredníctvom tabuľky, ktorá má v záhlaví riadkov a stĺpcov mená vrcholov a prvky tabuľky sú hodnoty 1, ak medzi danými vrcholmi existuje hrana, alebo hodnoty 0, ak medzi danými vrcholmi hrana neexistuje.

Tu máme dva príklady takejto reprezentácie. Prvá tabuľka reprezentuje graf železničnej siete z prvého obrázka a druhá tabuľka zodpovedá grafu z druhého obrázka.

	B	T	L	S	G
B	0	1	0	0	1
T	1	0	1	1	0
L	0	1	0	1	0
S	0	1	1	0	1
G	1	0	0	1	0

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	1	0

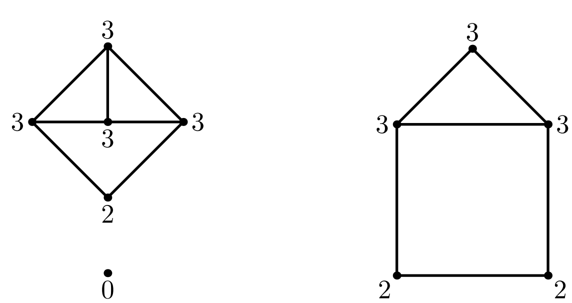
Teraz uveďme niekoľko ďalších príkladov grafov, s ktorými sa môžeme v praxi stretnúť:

- Cestná sieť: vrcholy sú križovatky, hrany sú priame cesty medzi križovatkami.
- Letecká sieť: vrcholy sú letiská, hranou sú spojené letiská, medzi ktorými existuje priame letecké spojenie.
- Počítačová sieť: vrcholy sú počítače, hrany sú prepojenia medzi počítačmi.
- Internet: vrcholy sú webové stránky, hrany sú medzi stránkami, ktoré odkazujú na seba.
- Sociálne siete: vrcholy sú ľudia, hrany medzi dvojicou ľudí môžu byť definované rôzne. Napríklad sú priatelia, majú na seba číslo v mobile, pracovali spolu nejaký čas a iné.
- Film: vrcholy sú herci, hrany sú medzi hercami, ktorí hrali spoločne v nejakom filme.
- Molekuly: vrcholy sú atómy, hrany sú väzby medzi nimi (ako sme to mohli vidieť na príklade etánu).
- Bunka: vrcholy sú molekuly v bunke, hranou sú spojené molekuly, ktoré v bunke vstupujú do spoločnej chemickej reakcie.

Niektoré z uvedených príkladov sú veľmi dôležité, napríklad štúdium vlastností grafov zodpovedajúcich dopravným sieťam pomohlo nájsť postupy, ktoré viedli k zníženiu nákladov na dopravu. Štúdium molekúl v bunke a ich vzájomných reakcií je dôležité napríklad aj pri hľadaní príčin vzniku rakoviny. V poslednej dobe sa upriamuje pohľad aj na vzájomné vzťahy medzi molekulami, a komplexnosť dejov prebiehajúcich v bunke sa vedci snažia opísať práve pomocou grafov.

2.1.2. Stupeň vrchola

Pozrime sa na nasledujúce obrázky. Čísla, ktoré sú pri každom vrchole, znamenajú počet hrán, ktoré z tohto vrchola vychádzajú, inými slovami, počet susedných vrcholov. Toto číslo nazývame stupeň vrchola.



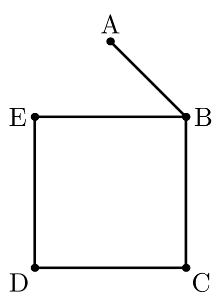
Čísla pri vrcholoch na obrázku sú stupne jednotlivých vrcholov. Sčítajme tieto stupne v oboch grafoch na obrázku. V prvom prípade je to 14 a počet hrán tohto grafu je 7, v druhom prípade je to 12 a počet hrán tohto grafu je 6. Zdá sa, že súčet stupňov vrcholov je rovný dvojnásobku počtu hrán.

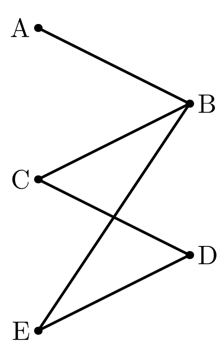
Úloha	Overte tento fakt na ďalších grafoch.

Dôvod, prečo to platí, je jednoduchý: Každá hrana má dva konce - vrcholy - a prispeje k tomuto súčtu počtom 2 (inak povedané, každá hrana zvýši stupeň práve dvoch vrcholov o 1). Vyriešme niekoľko úloh, kde tento fakt využijeme.

Úloha	Sedem kamarátok sa dohodlo, že si cez prázdniny pošlú pohľadnice nasledujúcim spôsobom: Každá pošle práve tri pohľadnice a každá pošle pohľadnicu práve tej kamarátke, od ktorej má dostať pohľadnicu. Napíšte rozpis (čiže nakreslite graf) posielania pohľadníc.
Návod	Rozpisu zodpovedá graf, v ktorom kamarátky reprezentujeme ako vrcholy a hranou sú spojené tie kamarátky, ktoré si vymenili pohľadnice. Hľadáme teda graf so siedmimi vrcholmi, pričom každý vrchol má stupeň 3. (Existuje taký?)
Úloha	Úlohu z predchádzajúceho zadania riešte pre iné počty kamarátok (napríklad šesť).
Úloha	Na večierku je 51 ľudí. Zdôvodnite, prečo tam musí byť človek, ktorý sa pozná s párnym počtom ľudí na tomto večierku. (Predpokladáme, že poznanie sa je vzájomné.)

Graf na nasledujúcom obrázku má špeciálnu vlastnosť: Jeho vrcholy sa dajú rozdeliť do dvoch množín tak, že hrany sú len medzi vrcholmi z dvoch rôznych množín. Ak sú dva vrcholy z tej istej množiny, tak medzi nimi nie je hrana. Vpravo máme tento graf nakreslený požadovaným spôsobom.





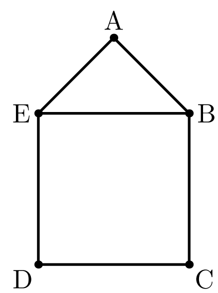
Taký graf sa nazýva bipartitný. Vidíme, že súčty stupňov vrcholov na jednej a na druhej strane sú rovnaké. Je to preto, že každá hrana má konce na rôznych stranách (v rôznych množinách), prispeje tak k súčtom na oboch stranách počtom 1. Využime tento fakt pri nasledujúcom probléme (založenom na pravdivej udalosti a prevzatom z [M]).

Vedci (zrejme sociológovia) z University of Chicago robili v roku 1994 prieskum na vzorke 2500 Američanov, v ktorom zisťovali, koľko mali opýtaní sexuálnych partnerov opačného pohlavia. Výsledok bol, že muži mali podľa odpovedí v priemere $1{,}75$-krát viac partneriek ako ženy partnerov. V roku 2004 robila ABC News podobný prieskum a výsledky boli takéto: Muži mali podľa odpovedí v priemere 20 partneriek a ženy v priemere 6 partnerov. Čiže muži mali v priemere $3{,}33$-krát viac partneriek ako ženy partnerov. ABC News navyše uviedla, že chyba v prieskume je nanajvýš $2{,}5$ percenta. Ktorý z týchto prieskumov bol teda bližšie k pravde?

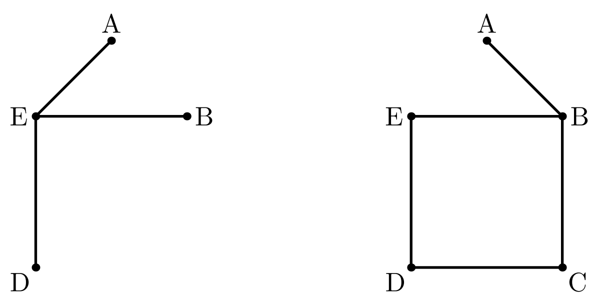
Celú situáciu môžeme modelovať bipartitným grafom. Keďže má okolo 300 miliónov vrcholov, čo je počet obyvateľov USA, tak ho radšej neskúšajme kresliť. Jedna strana bipartitného grafu bude mužská a druhá ženská. Každá hrana zodpovedá partnerstvu medzi príslušným mužom a ženou. A teraz trochu počítania: Priemerný počet partneriek u mužov označme p_{m} a priemerný počet partnerov u žien označme p_{z}. Počet žien žijúcich v USA označme z a počet mužov m. Ako sme povedali, našej situácii zodpovedá bipartitný graf. Súčet stupňov vrcholov na mužskej strane je $p_{\mathrm{m}} \cdot m$, a ten je rovný súčtu stupňov vrcholov na ženskej strane, teda číslu $p_{\mathrm{z}} \cdot z$. Z tejto rovnosti teda máme, že $p_{\mathrm{m}}/p_{\mathrm{z}} = z/m$. Podiel $p_{\mathrm{m}}/p_{\mathrm{z}}$ bol podľa prvého prieskumu $1{,}75$, podľa druhého prieskumu $3{,}33$. Z toho vychádza, že v USA žije $1{,}75$-krát (resp. $3{,}33$-krát) viac žien ako mužov. To je, samozrejme, nezmysel, podľa sčítania ľudu to je v skutočnosti $50{,}8$ percenta žien a $49{,}2$ percenta mužov. Videli sme, že jednoduchá úvaha o súčte stupňov vrcholov usvedčila oba prieskumy z omylu. Ako teda interpretovať výsledky týchto prieskumov? Čo súdiť o ľuďoch, ktorí robia a zverejňujú takéto prieskumy?

Štatistici môžu interpretovať výsledky prieskumov tak, že neboli vybraté reprezentatívne vzorky, ale ponúka sa aj jednoduchšie vysvetlenie: muži viac „kecajú“. :o)

2.1.3. Podgraf grafu



Podgraf grafu je graf, ktorý má len niektoré vrcholy a niektoré hrany (definované práve medzi týmito vrcholmi) pôvodného grafu. Na obrázku máme dva podgrafy daného grafu.

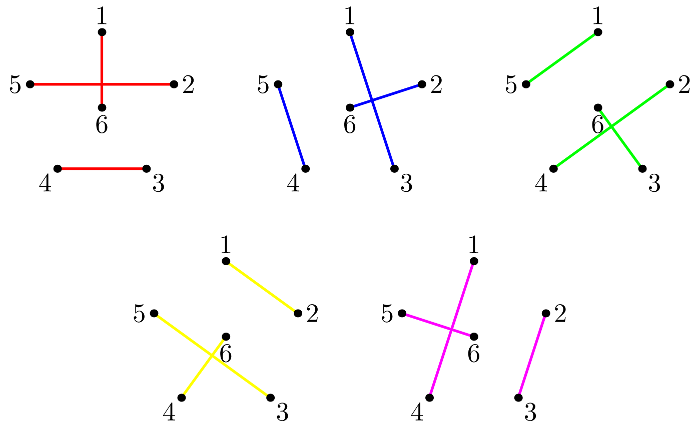


Druhý podgraf má tú istú vrcholovú množinu ako pôvodný graf. Takéto podgrafy nazývame faktorové podgrafy daného grafu.

2.1.4. Príklady využitia grafov

Grafy možno využiť napríklad aj pri žrebovaní športových turnajov, kde hrá každé mužstvo s každým. Takýto turnaj možno reprezentovať grafom, ktorého vrcholy zodpovedajú mužstvám, a zápas medzi dvojicou mužstiev je reprezentovaný hranou. Graf, ktorý zodpovedá takémuto turnaju, má hrany medzi všetkými dvojicami vrcholov. Vieme, že takéto turnaje sa hrajú na kolá.

Predpokladajme, že mužstiev je šesť. V jednom kole odohrá každé mužstvo práve jeden zápas, celý turnaj má teda päť kôl. Každé kolo je potom faktorový podgraf grafu tohto turnaja, v ktorom má každý vrchol stupeň 1. Ak nájdeme päť takých faktorových podgrafov, že žiadne dva nebudú mať spoločnú hranu, tak budeme mať vyžrebovanie turnaja na kolá. Päť kôl po troch zápasoch dáva pätnásť zápasov, čo zodpovedá počtu hrán pôvodného grafu. Na obrázku máme päť faktorových podgrafov zodpovedajúcich piatim kolám turnaja.



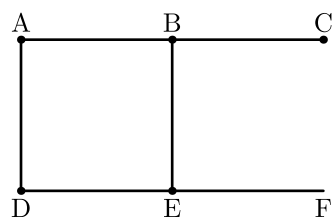
Toto sa dá zovšeobecniť pre každý turnaj s párnym počtom mužstiev $2n$. Na obvod umiestnime $2n-1$ mužstiev, jedno bude uprostred a doplníme hrany tak ako na obrázku. Hrany otáčame (vrcholy pritom zostávajú na svojom mieste), takže dostaneme $2n-1$ faktorových podgrafov, ktoré zodpovedajú jednotlivým kolám turnaja.

Úloha	Jednoduchým zásahom môžeme v predchádzajúcom príklade urobiť aj rozpis turnaja pre nepárny počet mužstiev (jedno mužstvo má v každom kole voľno). Vedeli by ste to urobiť ?

2.2. Súvislosť v grafe

2.2.1. Sledy medzi vrcholmi

Vezmime graf na nasledujúcom obrázku.



Ak sa chceme dostať napríklad z vrchola A do vrchola F, môžeme postupovať takto: Začneme v A, potom prejdeme po príslušnej hrane do B, ďalej do C, tam zistíme, že sa musíme vrátiť naspäť do B, potom pôjdeme do E, odtiaľ do F. Naše putovanie zapíšeme takto: $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{B}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$. Iné putovanie môže vyzerať nasledovne: $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$. Určite by ste našli aj iné spôsoby, ako sa dostať z A do F. Každé takéto putovanie nazývame sled medzi danými dvoma vrcholmi.

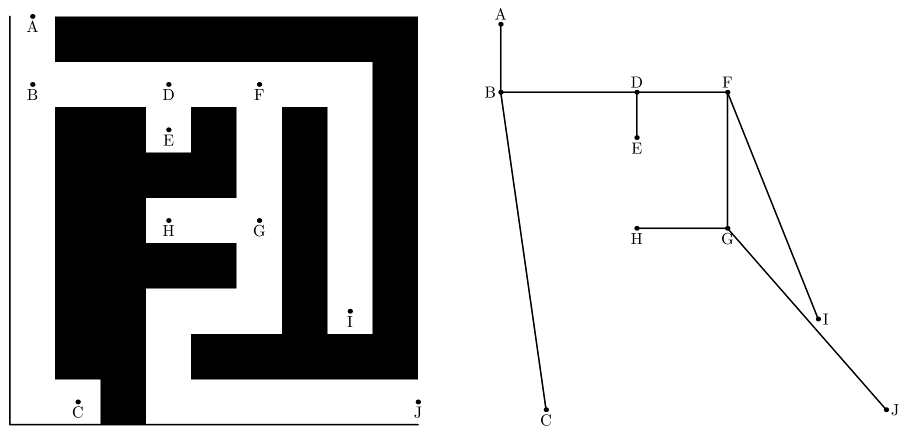
2.2.2. Súvislé a nesúvislé grafy

Pozrime sa na dva grafy na nasledujúcom obrázku.

Vidíme, že v prvom grafe sa môžeme dostať cestovaním po hranách z každého vrchola do každého. Takéto grafy nazývame súvislé. V druhom grafe sa takto nedostaneme napríklad z u do v. Takéto grafy nazývame nesúvislé.

2.2.3. Ako nájsť cestu z bludiska

Na obrázku máme „bludisko“ a graf, ktorý z neho vytvoríme takýmto spôsobom: Vchod, východ, križovatky a konce slepých chodieb predstavujú vrcholy, hranou sú spojené také dva vrcholy, medzi ktorými existuje priama chodba.



Nájsť cestu cez bludisko znamená nájsť sled medzi vrcholmi zodpovedajúcimi vchodu a východu. Vďaka štúdiu vlastností grafov sa našli efektívne postupy, pomocou ktorých sa môžeme vymotať z ľubovoľného bludiska. Jeden z možných postupov vyzerá takto:

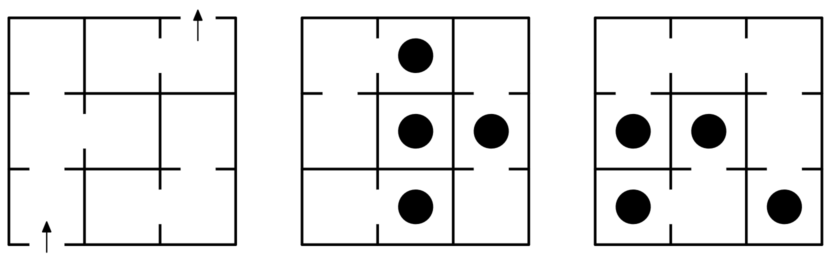
1. Každú chodbu, ktorou prechádzame, označme pri vstupe do nej aj na jej konci vhodnou značkou. Ak sme na niektorú križovatku (alebo koniec slepej chodby) dorazili prvýkrát, tak chodbu, ktorou sme tam prišli, nazveme „chodba prvého príchodu“ (jej koniec by mal mať špeciálnu značku).
2. Ak vyberáme chodbu, ktorou pokračovať, musíme dodržať nasledujúce pravidlá:
   (a) Každú chodbu možno použiť v jednom smere práve raz.
   (b) Chodbu prvého príchodu použijeme v opačnom smere, iba ak niet inej možnosti.

Postup sa končí, samozrejme, dosiahnutím východu. Matematici dokázali, že podmienky výberu chodieb nám zaručujú, že sa k východu vždy dostaneme. Navyše, ak je v bludisku m chodieb, tak počas prechádzania bludiskom prejdeme menej ako $2m$ chodieb (niektoré prejdeme oboma smermi). Dôkaz tu robiť nebudeme, len poznamenajme, že tento postup aj dôkaz jeho korektnosti máme vďaka tomu, že matematici si uvedomili možnosť reprezentovať každé bludisko ako graf.

Ešte si všimnime „technický detail“, ako značiť začiatky a konce chodieb v reálnom bludisku. Ak by sme mali kúsok kriedy, nebol by to problém. Inak by sme museli kresliť značky do prachu, alebo robiť šípky z kamienkov. V najhoršom prípade by sme mohli použiť kusy oblečenia – vyšli by sme z bludiska možno nahí, ale boli by sme nažive. (Jeden zlomyseľný študent dokonca navrhol značkovanie na spôsob psa. ;-))

Aktivita	Riešte pomocou uvedeného postupu úlohy na hľadanie cesty z bludiska. Snažte sa dodržať uvedený postup. Treba si uvedomiť, že pri rozhodovaní uprostred bludiska nevieme odhadnúť, ktorá chodba povedie k východu a ktorá nás zavedie do slepej chodby.

Na nasledujúcom obrázku máme príklad priestorového bludiska. Má tri poschodia, ktorých pôdorysy sú na obrázku nakreslené vedľa seba. Na prízemí je vchod do bludiska označený šípkou dnu a východ označený šípkou von. Na každom poschodí je deväť miestností. Medzi miestnosťami na jednom poschodí sa dá prejsť iba vtedy, keď majú spoločnú stenu a v tejto stene je otvor (na obrázku označený prerušenou čiarou). Medzi miestnosťami na rôznych poschodiach sa dá prejsť práve vtedy, keď je jedna bezprostredne pod druhou a tá vrchná má v podlahe urobený kruhový otvor, do ktorého je vložený rebrík.



Úloha	Prejdite bludiskom od vchodu k východu.
Návod	Skúste na hľadanie cesty cez takéto bludiská použiť vyššie spomenutý postup.

Táto úloha je prevzatá z knižky [HN], kde môžete nájsť ďalšie pekné priestorové bludiská.

2.3. Vzdialenosť vrcholov

2.3.1. „Spoločenská vzdialenosť" – Milgramov pokus

Americký sociológ Stanley Milgram uskutočnil pokus, v ktorom zisťoval, koľko ľudí je v priemere potrebných na sprostredkovanie kontaktu medzi dvomi náhodne vybranými ľuďmi (žijúcimi v USA). To znamená, že jedna z osôb sa skontaktuje so svojím známym, ten sa skontaktuje opäť so svojím známym, a takto to pokračuje, až kým nie je nadviazaný kontakt s druhou vybranou osobou. Milgram odhadol, že na skontaktovanie sa s ľubovoľným obyvateľom USA postačuje priemerne šesť sprostredkovateľov. Tento prieskum sa uskutočnil v USA v päťdesiatych rokoch, ale ukazuje sa, že keď to rozšírime na celý svet v súčasnosti, tak priemerný počet sprostredkovateľov nebude väčší (vďaka rozvoju dopravy a internetu). Celú situáciu môžeme reprezentovať grafom, ktorého vrcholy sú obyvatelia našej planéty a hrana medzi dvoma vrcholmi existuje práve vtedy, keď sa príslušní dvaja ľudia poznajú. Kritérium poznania sa dvoch ľudí je síce trochu nejasné, mohli by sme však namiesto toho upresniť, že sú schopní zabezpečiť sprostredkovanie kontaktu. Viac o tejto téme možno nájsť napríklad v knihe [Ba].

Úloha	Vyberte si známu (žijúcu) osobu a odhadnite, aká je „spoločenská vzdialenosť" medzi vami a touto osobou (vyberte takto aj iné osoby zo Slovenska alebo zo zahraničia a skúste nájsť podobné prepojenia).
Úloha	Takto môžeme definovať vzdialenosť aj v iných spoločenských sieťach. Definujte túto vzdialenosť napríklad na facebooku. Čo bude predstavovať hrany medzi vrcholmi?

2.3.2. Cesta medzi dvoma vrcholmi

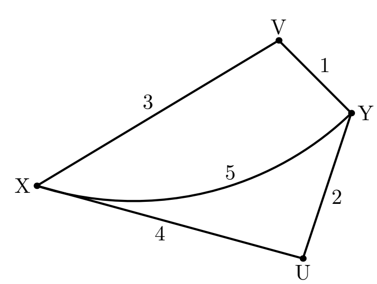
Sled (prechádzka po grafe), v ktorom žiadny vrchol nenavštívime viac ako raz, nazveme cesta. Pod pojmom dĺžka cesty rozumieme počet hrán, ktoré táto cesta obsahuje. Pojem cesta sa využíva na definovanie vzdialenosti medzi dvojicou vrcholov. V predchádzajúcej časti sme mali zavedenú (spoločenskú) vzdialenosť medzi dvojicou vrcholov. Mohli by sme povedať, že táto vzdialenosť zodpovedá najmenšiemu možnému počtu vrcholov, ktoré musíme navštíviť, kým sa dostaneme z počiatočného vrchola do koncového. Pri grafoch sa však ukazuje výhodnejšie merať vzdialenosť medzi vrcholmi pomocou počtu hrán, ktoré musíme prejsť. Ak teda hovoríme, že dva vrcholy majú vzdialenosť d, znamená to, že najmenší možný počet hrán, ktoré treba prejsť, kým sa dostaneme z jedného vrchola do druhého, je d. Inak povedané, najkratšia cesta medzi príslušnými vrcholmi má vtedy dĺžku d.

Úloha	Nájdite (ľubovoľnú) cestu medzi dvomi vrcholmi v danom grafe. Navrhnite postup na hľadanie cesty medzi vybranou dvojicou vrcholov v grafe.

2.3.3. Hľadanie najkratšej cesty

Hľadanie najkratšej cesty medzi dvoma vrcholmi je typickým problémom teórie grafov. Ešte dôležitejší ako v obyčajných grafoch je tento problém v hranovo ohodnotených grafoch. To sú grafy, v ktorých priradíme každej hrane nejaké číslo. V prípade, že tento graf reprezentuje dopravnú sieť, toto číslo môže zodpovedať vzdialenosti daných vrcholov (napríklad miest) v kilometroch. Dĺžka cesty je potom definovaná ako súčet hodnôt na všetkých hranách tejto cesty. Najkratšia cesta medzi dvojicou vrcholov v takomto grafe je potom tá cesta z jedného do druhého, v ktorej je súčet ohodnotení hrán najmenší.

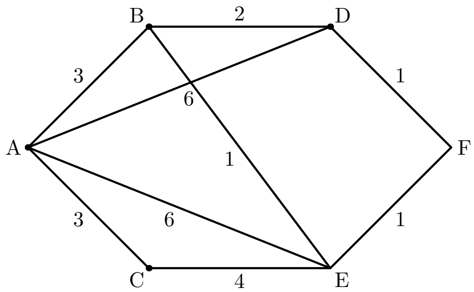
Medzi vrcholmi X a Y na obrázku je to cesta cez vrchol V. Jej dĺžka je 4, dĺžka druhej cesty, priamo po hrane z X do Y je, samozrejme, 5.



Hľadanie najkratšej cesty (a jej dĺžky) je úplne bežná praktická úloha. Spomeňme napríklad autoatlas, kde máme tabuľku vzdialeností medzi mestami. Táto tabuľka bola zostavená tak, že cestná sieť bola prezentovaná ako hranovo ohodnotený graf a pomocou vhodného algoritmu boli na počítači nájdené najkratšie cesty a vzdialenosti medzi vrcholmi (čiže mestami). Podobné algoritmy na hľadanie najkratšej cesty sú „zabudované" aj v počítačových programoch na hľadanie najkratšieho dopravného spojenia, v GPS-kách a určite by sme našli aj iné oblasti, kde sa tieto postupy uplatnili.

Tu si ukážeme grafársky pohľad na tento algoritmus. Nasledujúci text je vhodný skôr pre matematikov. Nematematici môžu prikročiť priamo k úlohe v nasledujúcom rámčeku.

Ukážme jeden algoritmus na hľadanie najkratšej cesty medzi danými vrcholmi. Tento algoritmus sa nazýva Dijkstrov a bol spomenutý už v predchádzajúcej kapitole. Ilustrujme ho na konkrétnom príklade. Nájdime najkratšiu cestu z A do F v grafe na obrázku.



Vrcholu A priraďme značky $t(\mathrm{A}) = 0$ a $x(\mathrm{A}) = 0$, ostatným vrcholom v priraďme značky $t(v) = \infty$ a $x(v) = 0$ (prvá značka bude zodpovedať hodnote doteraz nájdenej najkratšej cesty z A do daného vrchola, druhá značka bude označovať predposledný vrchol tejto cesty). Pri výpočte sa niektoré označenia budú meniť (tie, kde ešte nie je nájdená najkratšia cesta) a niektoré už zostanú konštantné (tie, kde bola nájdená najkratšia cesta). Označenia pri A sú konštantné už na začiatku. V ďalšom kroku pozeráme hrany vychádzajúce z vrchola A do vrcholov B, C, D, E. Pri každom z týchto vrcholov meníme značky takto: $t(\mathrm{B}) = 3$, $x(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, $t(\mathrm{C}) = 3$, $x(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$, $t(\mathrm{D}) = 6$, $x(\mathrm{D}) = \mathrm{A}$, $t(\mathrm{E}) = 6$, $x(\mathrm{E}) = \mathrm{A}$. Najmenšiu z hodnôt $t(\mathrm{B})$, $t(\mathrm{C})$, $t(\mathrm{D})$, $t(\mathrm{E})$ prehlásime za konštantnú (ak ich je viac na výber, zvolíme si ľubovoľnú z nich, na ďalšiu príde rad v nasledujúcom kroku). Nech je to hodnota pri B. Teraz skúmame hrany z B do všetkých vrcholov, ktoré ešte nemajú konštantné označenie - sú to D, E. Zaujíma nás, či je $t(\mathrm{D}) = 6$ väčšie ako súčet $t(\mathrm{B}) + c(\mathrm{BD}) = 3 + 2$ (kde $c(\mathrm{BD})$ je hodnota hrany BD). Vidíme, že to je pravda. Našli sme teda kratšiu cestu z A do D, a to cez vrchol B. Hodnota $t(\mathrm{D})$ sa zmení na 5 a hodnota $x(\mathrm{D})$ sa zmení na B. Podobne hodnota $t(\mathrm{E})$ sa zmení na 4 a $x(\mathrm{E})$ na B. Z vrcholov v, ktorých označenie je nekonštantné, vyberieme ten, ktorý má minimálnu hodnotu $t(v)$. Vidíme, že je to vrchol C. V ďalšom kroku prezeráme teda hrany z C do vrcholov, ktoré nemajú konštantné označenie. Takto pokračujeme, až kým hodnota pri F nebude konštantná. Celý postup je v nasledujúcej tabuľke.

cyklus	$t(\mathrm{A})$	$x(\mathrm{A})$	$t(\mathrm{B})$	$x(\mathrm{B})$	$t(\mathrm{C})$	$x(\mathrm{C})$	$t(\mathrm{D})$	$x(\mathrm{D})$	$t(\mathrm{E})$	$x(\mathrm{E})$	$t(\mathrm{F})$	$x(\mathrm{F})$
0.	0	0	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0
1.	-	-	3	A	3	A	6	A	6	A	-	-
2.			-	-	-	-	5	B	4	B	-	-
3.							-	-	-	-	5	E

Najkratšia cesta z A do F má dĺžku 5 a skonštruujeme ju pomocou značiek $x(v)$ pre príslušné vrcholy. Vieme, že predposledný vrchol tejto cesty je $x(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$. Pred vrcholom E je vrchol $x(\mathrm{E}) = \mathrm{B}$. Pred B je vrchol $x(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, čiže začiatok. Najkratšia cesta je teda daná postupnosťou vrcholov $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$. Môžeme sa pýtať, prečo takýto postup, keď v tomto grafe sa dala najkratšia cesta určiť pohľadom na obrázok? Tento postup sa totiž dá naprogramovať tak, aby sme pomocou počítača vedeli nájsť najkratšiu cestu medzi dvojicou vrcholov v ľubovoľnom grafe. Napríklad aj v tak rozsiahlom grafe, ktorý zodpovedá cestnej sieti Slovenska so všetkými mestami a obcami.

Úloha

Vyplňte nasledujúcu tabuľku (zodpovedajúcu opäť grafu železničnej siete z prvého obrázka) tak, aby medzi príslušnými vrcholmi boli dĺžky najkratších ciest. Údaje vyhľadajte na internete (napríklad pomocou vyhľadávačov dopravného spojenia). Popremýšľajte, ako sa v týchto vyhľadávačoch využívajú tu spomenuté postupy.

	B	T	L	S	G
B	0	46			
T	46	0	17		
L		17	0		
S				0	
G					0

2.4. Stromy a kostry

2.4.1. Súvislé acyklické grafy - stromy

Cyklus je také putovanie grafom (taký sled), v ktorom začneme a skončíme v tom istom vrchole a žiadny iný vrchol nie je navštívený viackrát. Strom je súvislý graf, ktorý neobsahuje cyklus. Na nasledujúcom obrázku máme príklady dvoch stromov.

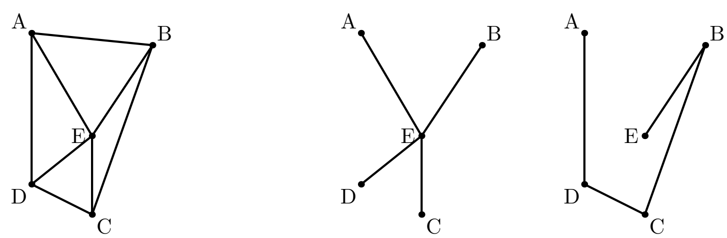
Druhý strom na obrázku sa nazýva aj koreňový strom a vrchol, ktorý je navrchu, sa nazýva koreň. Z koreňa vychádzajú hrany do niekoľkých vrcholov (tu do dvoch), ktoré kreslíme na tej istej úrovni a nazývame ich nasledovníkmi. Z každého z týchto vrcholov môže vychádzať niekoľko hrán do ďalších vrcholov, ktoré kreslíme o úroveň nižšie. Ak z niektorého vrchola už nevychádza hrana smerom dolu, tak ho nazývame koncový. Koreňové stromy sa používajú pri zobrazovaní rodokmeňa a rôznych hierarchických štruktúr. Menej triviálne, ale o to užitočnejšie je využitie koreňových stromov pri reprezentácii aritmetických výrazov, čo sa využíva aj v prekladačoch programovacích jazykov.

Úloha	Nakreslite niekoľko stromov. Koľko vrcholov a hrán majú? Zistite, koľko hrán má strom s n vrcholmi.
Úloha	Zvoľte si dva ľubovoľné vrcholy v strome. Koľko rôznych ciest medzi nimi existuje?

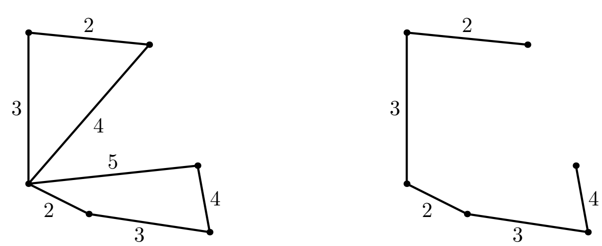
2.4.2. Kostra grafu

Pojem faktorového pografu bol definovaný v stati 2.1.3.

Kostra grafu je taký faktorový podgraf daného grafu, ktorý je zároveň stromom. Na obrázku máme graf a dve jeho kostry.



Ak máme graf, ktorý má hrany ohodnotené číslami a vyberieme niektorú jeho kostru, tak súčet hodnôt na hranách tejto kostry sa nazýva cena tejto kostry. Najlacnejšia kostra v danom grafe je kostra s najnižšou cenou. Na obrázku je graf a jeho najlacnejšia kostra.



Jedna z prvých praktických úloh z teórie grafov súvisí práve s týmto pojmom: Po prvej svetovej vojne bola v Čechách a na Morave budovaná elektrická sieť. Otázka bola, ako sa má táto sieť vybudovať, ak majú byť pripojené všetky mestá a dediny a zároveň majú byť náklady na stavbu minimálne. Situáciu môžeme reprezentovať grafom, v ktorom vrcholy sú mestá a dediny, hrany zodpovedajú úsekom, kde môže byť vybudovaný priamy úsek medzi dvojicou obcí. Graf bude hranovo ohodnotený, každej hrane priradíme číslo, ktoré zodpovedá nákladom na postavenie príslušného úseku. Riešeniu úlohy zodpovedal faktorový podgraf daného grafu, ktorý bol súvislý, nemal žiadne „zbytočné“ hrany (čiže neobsahoval cyklus) a súčet hodnôt hrán, ktoré obsahoval, bol minimálny. Keď si tieto vlastnosti zhrnieme, vychádza nám, že šlo práve o najlacnejšiu kostru grafu.

Postup hľadania najlacnejšej kostry je veľmi jednoduchý:

1. Zoradíme si hrany grafu podľa ohodnotenia od najmenšej po najväčšiu.
2. Prvú hranu z tohto zoznamu zoberieme. Ak jej pridaním do vytváranej kostry nevzniká cyklus, hranu tam zaradíme.
3. Ak je počet hrán do kostry zaradených rovný $n-1$, kde n je počet vrcholov grafu, tak máme najlacnejšiu kostru. STOP.
4. Ak by pridaním hrany do vytváranej kostry vznikol cyklus, hranu nepoužijeme.
5. Späť na krok 2.

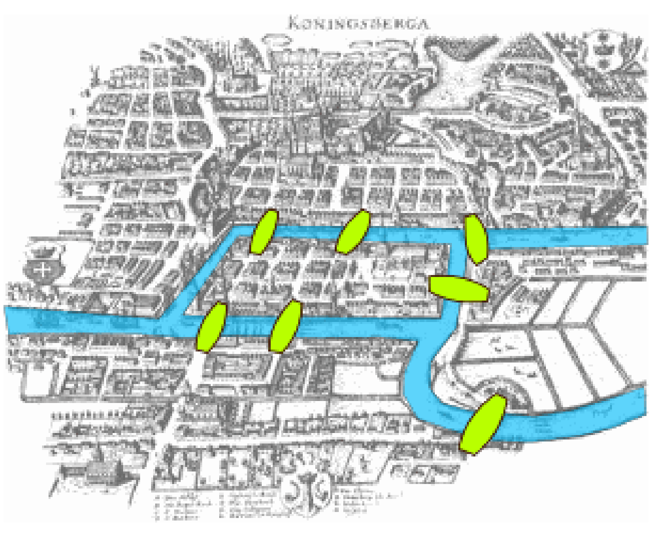
Testovanie, či zaradením hrany nevzniká cyklus, sa rieši pekným trikom, ktorý možno nájsť napríklad v knihe [Pa].

Úloha	Použite spomenutý postup na hľadanie najlacnejšej kostry v daných hranovo ohodnotených grafoch.

2.5. Pochôdzky v grafoch

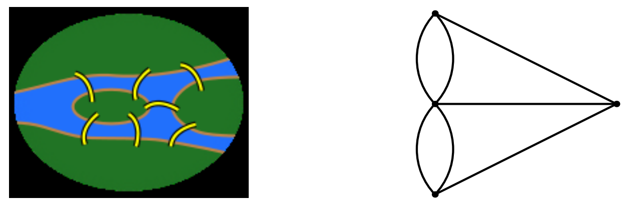
2.5.1. Kreslenie grafov jedným ťahom

Za prvú úlohu teórie grafov sa považuje úloha o siedmich mostoch mesta Kráľovec, ktorú vyriešil Leonhard Euler. Začnime teda touto úlohou: V meste Kráľovec (dnes ruský Kaliningrad) bolo cez rieku, na ktorej boli dva ostrovy, sedem mostov tak, ako je to na obrázku.

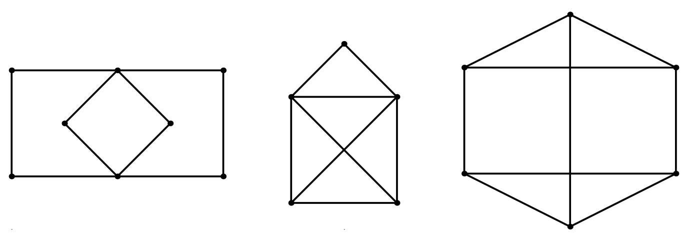


zdroj: http://en.wikipedia.org/wiki/

Obyvatelia mesta si vymysleli nasledujúcu zábavu: Snažili sa prejsť všetkých sedem mostov tak, aby každý prešli práve raz a vrátili sa tam, odkiaľ vyšli. Nikomu sa to však nedarilo, tak sa nad úlohou zamyslel Euler, ktorý tam v tom čase pôsobil, a dokázal, že to nie je možné. Miesto prechádzania mostov reprezentoval celú situáciu obrázkom, ktorý zodpovedá grafu (presnejšie tzv. multigrafu, lebo medzi niektorými vrcholmi vedie viacero hrán).



Vrcholy zodpovedajú brehom a ostrovom a hrany mostom. Asi nie je ťažké si uvedomiť, že prejdenie siedmich mostov zodpovedá nakresleniu uvedeného grafu jedným ťahom, pričom sa máme vrátiť do vrchola, v ktorom sme začínali. Euler úlohu nevyriešil len pre tento prípad, ale našiel všeobecné kritériá, pomocou ktorých je možné rozhodnúť, či sa obrázok (graf) dá nakresliť jedným ťahom, alebo nie. Pozrime sa na ďalšie grafy, skúste ich nakresliť jedným ťahom (každú čiaru ťaháme vždy z vrchola do vrchola, nemôžeme zmeniť smer tam, kde sa hrany krížia mimo vrcholov).



Prvý graf sa nám zrejme podarí nakresliť jedným ťahom – môžeme začať v ľubovoľnom vrchole, a v tom istom vrchole aj skončíme (musíme len dávať pozor, aby sa mu ešte neprejdené cesty nerozpadli na nesúvislé kúsky). Hovoríme, že sme ho nakreslili jedným uzavretým ťahom. Druhý graf (známa to detská hádanka) vieme nakresliť jedným ťahom tak, že začneme v jednom z dolných vrcholov a skončíme v druhom. Hovoríme, že sme ho nakreslili jedným otvoreným ťahom. Tretí graf sa nám určite nepodarilo nakresliť jedným ťahom, podobne ako graf zodpovedajúci úlohe o siedmich mostoch. Kritériá na zistenie, či sa dá graf nakresliť jedným ťahom, sú veľmi jednoduché:

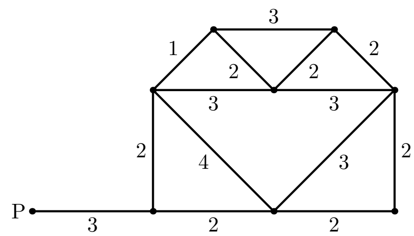
- Graf (samozrejme, súvislý) sa dá nakresliť jedným uzavretým ťahom práve vtedy, keď majú všetky jeho vrcholy párny stupeň.
- Graf (súvislý) sa dá nakresliť jedným otvoreným ťahom, ak má práve dva vrcholy nepárneho stupňa (všetky ostatné teda majú párny stupeň). Kreslenie sa potom musí začať v jednom z vrcholov nepárneho stupňa a skončiť v druhom.

2.5.2. Úloha čínskeho poštára

Zaujímavý názov úlohy neznamená riešenie problému, ako doručiť miliardu listov, ale je to problém, ktorý začali riešiť čínski matematici:

Poštár má vyjsť z pošty, prejsť všetky ulice svojho rajónu a vrátiť sa na poštu tak, aby sa čo najmenej nachodil. Poštárov rajón môžeme reprezentovať ako graf. Vrcholy sú pošta, konce ulíc a križovatky. Hrany sú ulice. Hodnoty na hranách zodpovedajú dĺžkam jednotlivých ulíc. Čiže musíme prejsť všetky hrany grafu tak, aby príslušná pochôdzka bola čo najkratšia. Ak sa dá graf nakresliť jedným uzavretým ťahom, tak je riešenie jasné. Každú hranu – ulicu – prejde poštár práve raz a vráti sa späť na poštu. Problém nastáva, keď sa tento graf nedá nakresliť jedným uzavretým ťahom. Vtedy musí poštár prejsť niektoré ulice dvakrát. Našou úlohou je určiť, ktoré to budú.

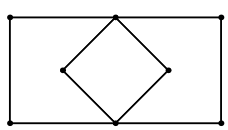
Úloha	Vyriešte úlohu čínskeho poštára pre nasledujúci graf. (Vrchol P je pošta.)

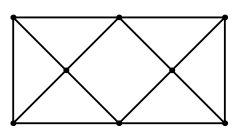


Podobne sa riešia aj úlohy, ktoré v literatúre nájdeme pod názvom úloha o kropiacom voze či úloha o snežnom pluhu.

2.5.3. Úloha obchodného cestujúceho

Obchodný cestujúci má navštíviť všetkých svojich zákazníkov a vrátiť sa domov tak, aby sa čo najmenej nachodil. Toto je veľmi známa úloha, ktorá má množstvo modifikácií. Z pohľadu teórie grafov je to úloha prejsť všetky vrcholy hranovo ohodnoteného grafu a vrátiť sa späť tak, aby prejdená vzdialenosť bola najmenšia. Jedna z verzií tejto úlohy (a pravdepodobne pôvodná) je takáto: Obchodný cestujúci má navštíviť všetkých svojich zákazníkov, každého práve raz a vrátiť sa späť. Základná otázka potom znie, či sa to vôbec dá. Preložené do reči teórie grafov: Existuje v danom grafe cyklus, ktorý obsahuje všetky vrcholy tohto grafu? Tento cyklus sa nazýva hamiltonovský. Na rozdiel od predchádzajúcej úlohy o kreslení jedným ťahom, kde sme sa pýtali, či vieme prejsť všetky hrany daného grafu a každú práve raz, nie je známe žiadne jednoduché kritérium, pomocou ktorého by sme vedeli charakterizovať grafy, ktoré majú hamiltonovský cyklus.





Úloha	Vyskúšajte si hľadanie hamiltonovského cyklu v niektorých grafoch.

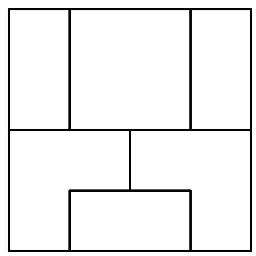
V grafoch s malým počtom vrcholov sa dá hamiltonovský cyklus nájsť pomerne jednoducho, problém nastáva pri trochu väčších grafoch (majúcich rádovo desiatky vrcholov). Tam majú problém aj počítače, pretože sa doteraz nepodarilo objaviť rýchly algoritmus, ktorý by dokázal hľadať takéto cykly v grafoch spomenutého rozsahu (a nikto nedokázal, že takýto algoritmus neexistuje). To má nepríjemné dôsledky aj pre prax, lebo mnohé praktické problémy (napríklad plánovanie zásobovacích trás či liniek autobusovej dopravy) obsahujú ako podúlohu práve nájdenie takýchto cyklov v príslušnom grafe (obyčajne ešte požadujeme, aby boli aj najlacnejšie), preto mnohokrát nie sme schopní nájsť optimálne riešenie takejto úlohy v rozumnom čase. V takých prípadoch sa musíme uspokojiť s riešeniami, ktoré sa k optimu aspoň blížia (ale to už je trochu náročnejšia matematika a informatika).

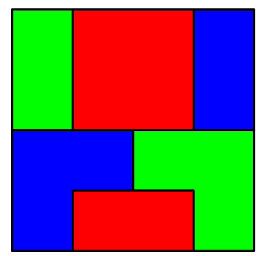
2.6. Farbenie grafov

Farbenie grafov je ďalšia oblasť teórie grafov, kde sa stierajú hranice medzi rekreačnou a odbornou matematikou. Preto je zaraďovaná do základných kurzov z teórie grafov a diskrétnej matematiky.

2.6.1. Farbenie máp

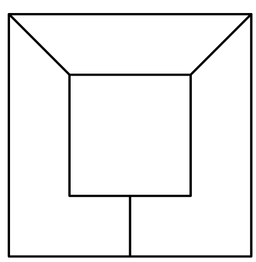
V polovici 19. storočia sa niektorí matematici začali zaoberať problémom, koľko farieb stačí na zafarbenie každej politickej mapy, ak susedné štáty (susedné oblasti) majú byť zafarbené rôznymi farbami. Oblasti považujeme za susedné, ak majú spoločnú hraničnú čiaru (nestačí len bod), a uvažujme len o súvislých oblastiach (vylúčime prípady ako Rusko a oblasť už spomínaného Kaliningradu). Mapa na obrázku sa dá zafarbiť tromi farbami.

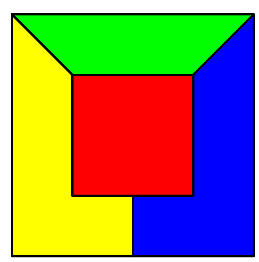




Úloha	Nájdite mapu, ktorá sa nedá zafarbiť tromi farbami.
Úloha	Skúste nájsť mapu, ktorá sa nedá zafarbiť štyrmi farbami.

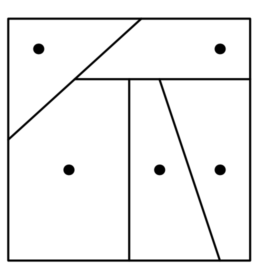
Posledná úloha je trochu zlomyseľná. Mapu, ktorá sa nedá zafarbiť tromi farbami, nie je problém nájsť. Existuje dokonca mapa, ktorá má len štyri oblasti a nedá sa zafarbiť tromi farbami. Mapa, ktorá sa nedá zafarbiť štyrmi farbami, však neexistuje. Matematikom trvalo viac ako sto rokov, kým toto tvrdenie v plnej všeobecnosti dokázali.

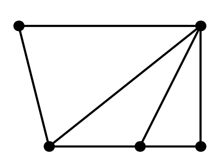




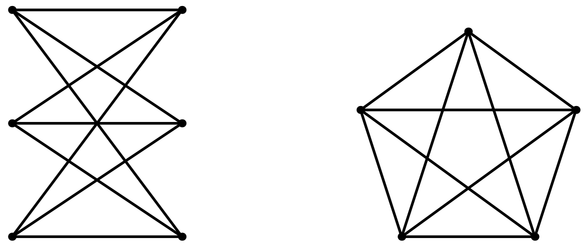
2.6.2. Rovinné grafy

Vezmime si mapu na nasledujúcom obrázku a vyznačme hlavné mestá všetkých oblastí. Nech tieto hlavné mestá predstavujú vrcholy grafu a hranou spojme tie vrcholy, ktorých oblasti sú susedné. Príslušný graf máme vedľa mapy.





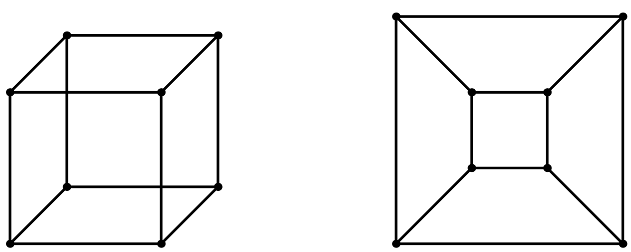
Graf na obrázku má špeciálnu vlastnosť: Dá sa nakresliť v rovine tak, že jeho hrany sa mimo vrcholov nepretnú. Takéto grafy nazveme rovinné. Otázka znie: Je každý graf rovinný?

Úloha	Prekreslite grafy na týchto obrázkoch tak, aby sa ich hrany nepretínali mimo vrcholov. 

Po chvíľke kreslenia prídeme na to, že to nie je možné. Tieto grafy totiž nie sú rovinné.

Úloha	Premyslite si, ako by sa uvedené grafy dali nakresliť na pneumatiku (tzv. toroid) tak, aby sa ich hrany nepretínali mimo vrcholov. (Prezradíme, že to je možné.)

Dôležitými príkladmi rovinných grafov sú grafy mnohostenov. Tieto grafy vieme nakresliť do roviny tak, že ich hrany sa nepretnú mimo vrcholov. Na obrázku máme takto nakreslenú kocku. Vidíme, že príslušný graf je rovinný.



Dodajme, že názvy kľúčových pojmov teórie grafov „vrchol“ a „hrana“ pochádzajú práve z tejto jej oblasti.

Úloha	Nakreslite graf štvorstena, štvorbokého ihlana, trojbokého a päťbokého hranola do roviny tak, aby sa ich hrany nepretínali.
Úloha	Kocka a pravidelný štvorsten sú príklady tzv. platónovských telies. Nájdite na internete obrázky zvyšných troch platónovských telies (pravidelný osemsten, pravidelný dvanásťsten a pravidelný dvadsaťsten) a ich grafy nakreslené v rovine.
Úloha	Sú grafy zodpovedajúce platónovskym telesám hamiltonovské? (Vieme prejsť všetky vrcholy týchto grafov tak, aby sme každý vrchol navštívili práve raz a vrátili sa späť do začiatočného vrchola?)
Úloha	Zistite počet vrcholov, počet stien a počet hrán v týchto mnohostenoch a skúste sformulovať vzájomný vzťah medzi nimi.
Riešenie	Ak označíme v počet vrcholov, h počet hrán a s počet stien, platí vzťah $s + v = h + 2$, ktorý dokázal už spomínaný Euler.

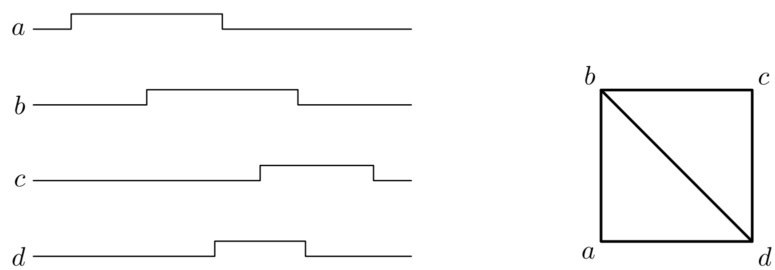
2.6.3. Farbenie grafov

V predchádzajúcej časti sme videli, že farbenie máp možno previesť na farbenie grafov tak, že každé dva susedné vrcholy musíme zafarbiť rôznymi farbami. Na základe toho, čo sme povedali o farbení máp, vieme, že na zafarbenie vrcholov ľubovoľného rovinného grafu nám stačia štyri farby. Veľmi dôležitá otázka je: Aký je najmenší počet farieb, ktorými možno zafarbiť ľubovoľný graf tak, aby susedné vrcholy boli zafarbené rôznymi farbami.

Úloha	Nakreslite si nejaké grafy a skúste ich vrcholy zafarbiť pomocou najmenšieho možného počtu farieb. Skúste takto zafarbiť aj nerovinné grafy z predchádzajúcej časti.

2.6.4. Využitie farbenia grafov

Ukázalo sa, že farbenie grafov sa dá využiť pri riešení mnohých praktických problémov. Pekná aplikácia je napríklad prideľovanie spojov (vlakových alebo autobusových) na nástupištia. Spoje budú zodpovedať vrcholom grafu. Dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď sú tieto spoje na autobusovej stanici v tom istom čase. Ak zafarbíme vrcholy takéhoto grafu, tak každá farba zodpovedá jednému nástupišťu. Spoje prislúchajúce vrcholom s tou istou farbou nemôžu byť na autobusovej stanici v tom istom čase. Na nasledujúcom obrázku je jednoduchý príklad.



Úloha	Nakreslite nejaký graf, ktorý má aspoň osem vrcholov, a zistite, aký najmenší počet nástupíšť potrebujeme, aby nedošlo ku kolíznej situácii.

Farbenie grafov sa využíva pri riešení úloh, kde potrebujeme vylúčiť podobné kolízne situácie. Napríklad pri fázovaní svetelných križovatiek: Jednotlivé dopravné prúdy budú zodpovedať vrcholom. Hranou spojíme dva vrcholy práve vtedy, keď tieto prúdy nemôžu vojsť do križovatky v tom istom čase. Ak zafarbíme vrcholy tohto grafu, tak vrcholy majúce rovnakú farbu zodpovedajú prúdom, ktoré môžu mať zelenú v tom istom čase. Podobne by sme mohli uviesť ďalšie úlohy, kde sa dá využiť farbenie grafov (napríklad aj pri zostavovaní rozvrhov hodín). Takéto úlohy sa v praxi samozrejme riešia pomocou počítačov, úlohou matematikov je vymyslieť a zostaviť algoritmy na riešenie takýchto úloh a úlohou informatikov je ich naprogramovať.

Výstupné vedomosti

Účastník vzdelávania po úspešnom absolvovaní tohto modulu dokáže previesť niektoré úlohy na úlohy z teórie grafov. Dokáže sformulovať zaujímavé problémy z teórie grafov, ktorých riešenie môže motivovať žiakov k riešeniu na počítači. Je ochotný a schopný vytvoriť neštandardné riešenie problému, alebo zadať problém, ktorého riešenie nepozná.

Literatúra

[Ba] Barabási, A. L.: *V pavučine sítí*, Paseka, Praha, 2005

[Bo] Bosák, J.: *Grafy a ich aplikácie*, Alfa, Bratislava, 1980

[D] Demel, J.: *Grafy a jejich aplikace*, ACADEMIA, Praha, 2002

[HN] Hejný, M., Niepel, Ľ: *Šestnásť matematických príbehov*, Mladé letá, Bratislava, 1983

[M] Meyer, A. R.: *Mathematics for Computer Science*, Massachusetts Institute of Technology, 2007

[Pa] Palúch, S.: *Teória grafov*, EDIS, Žilina, 2001

[Pl] Plesník, J.: *Grafové algoritmy*, Veda, Bratislava, 1983

[S] Sedláček, J.: *Úvod do teórie grafov*, ACADEMIA, Praha, 1981

Tento študijný materiál vznikol ako súčasť národného projektu *Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika* v rámci aktivity *Vzdelávanie nekvalifikovaných učiteľov informatiky na 2. stupni ZŠ a na SŠ*.

Autori ©	doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD. Mgr. Peter Czimmermann
Názov	Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika
Podnázov	Matematika pre učiteľov informatiky 3

Študijný materiál prešiel recenzným pokračovaním.

Recenzenti	doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc. Mgr. Júlia Tomanová, PhD.
Počet strán	40
Náklad	300 ks

Prvé vydanie, Bratislava 2010

Vydal Štátny pedagogický ústav, Pluhová 8, 8300 00 Bratislava, v súčinnosti s Univerzitou Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Univerzitou Komenského v Bratislave, Univerzitou Konštantína Filozofa v Nitre, Univerzitou Mateja Bela v Banskej Bystrici a Žilinskou univerzitou v Žiline.

Vytlačil	BRATIA SABOVCI, s r.o., Zvolen

ISBN 978-80-8118-028-6