Charakteristika úlohy č. 1

Úloha č. 1 – Žiak objasní (definuje) dané pojmy, uvedie ich príklady a kontrapríklady, sformuluje ich vlastnosti a súvislosti medzi uvedenými pojmami. Prevláda forma monológu.

Príklad úlohy č. 1

Základy matematiky – Teória čísel

Znaky deliteľnosti, NSD, NSN, prvočíselný rozklad.

Možné riešenie úlohy č. 1

Ak $a, b \in N$, tak:

- číslo a **je deliteľné** číslom b práve vtedy, keď existuje také prirodzené číslo k, že platí $a = b \cdot k$
- číslo a **je násobkom** čísla b, ak platí $a = b \cdot k$
- číslo b **delí** číslo a, ak existuje také prirodzené číslo k, že platí $a = b \cdot k$

Znaky deliteľnosti:

- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 2, ak sa končí cifrou 0, 2, 4, 6, 8,
- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 3, ak ciferný súčet čísla je deliteľný číslom 3,
- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 4, ak posledné dvojčíslie je deliteľné číslom 4,
- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 5, ak posledná cifra je 0 alebo 5,
- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 6, ak je deliteľné číslom 2 aj 3,
- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 8, ak posledné trojčíslie je deliteľné číslom 8,
- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 9, ak ciferný súčet čísla je deliteľný číslom 9,
- prirodzené číslo n je deliteľné číslom 10, ak posledná cifra je 0.

Prvočíslo je prirodzené číslo, ktoré má práve dva rôzne delitele, a to číslo 1 a samé seba.
Najmenšie prvočíslo je číslo 2. Prvočísel je nekonečne veľa.

Zložené číslo je každé prirodzené číslo väčšie ako 1, ktoré nie je prvočíslom.

Prvočíselný rozklad
Každé zložené číslo sa dá rozložiť na súčin prvočísel.
Rozklad zloženého čísla na súčin prvočísel je až na poradie činiteľov jednoznačný.

Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné žiadnym prvočíslom $\leq \sqrt{n}$, tak je n prvočíslom.

Najväčší spoločný deliteľ – NSD
Spoločný deliteľ prirodzených čísel je každé prirodzené číslo, ktoré je deliteľom každého z nich.
Najväčšie číslo z nich sa nazýva najväčší spoločný deliteľ (NSD).
<u>Výpočet NSD čísel *m, n* metódou prvočíselného rozkladu</u>:
Najprv číslo m a n rozložíme na prvočíselný rozklad.
Potom určíme NSD ako súčin mocnín tých prvočísel, ktoré sa vyskytujú zároveň v oboch prvočíselných rozkladoch čísel m, n, pričom za exponent každého prvočísla sa berie najmenší exponent vyskytujúci sa u tohto prvočísla v rozkladoch čísel m, n.

Najmenší spoločný násobok – NSN
Spoločný násobok prirodzených čísel je také prirodzené číslo, ktoré je násobkom každého z nich. Spoločných násobkov je nekonečne veľa.

Najmenšie číslo z nich sa nazýva najmenší spoločný násobok (NSN).

<u>Výpočet NSN čísel *m*, *n* metódou prvočíselného rozkladu</u>:
Najprv číslo *m* a *n* rozložíme na prvočíselný rozklad.
Potom určíme NSN ako súčin mocnín všetkých prvočísel, ktoré sa vyskytujú aspoň v jednom prvočíselnom rozklade čísel *m*, *n*, pričom exponent každého prvočísla je najväčší exponent vyskytujúci sa u tohto prvočísla v rozkladoch čísel *m*, *n*.

Platí vzťah $a \cdot b = \mathrm{NSN}(a, b) \cdot \mathrm{NSD}(a, b)$

Nesúdeliteľné čísla sú také prirodzené čísla väčšie ako 1, ktorých najväčší spoločný deliteľ sa rovná číslu 1.

Súdeliteľné čísla sú také prirodzené čísla väčšie ako 1, ktorých najväčší spoločný deliteľ sa rovná číslu väčšiemu ako 1.

Ak je číslo *n* deliteľné dvoma nesúdeliteľnými číslami *k*, *r*, tak je deliteľné aj číslom $k \cdot r$.

Charakteristika úlohy č. 2

Úloha č. 2 – Úloha je zameraná na argumentáciu a dôvodenie. Prevláda forma dialógu s členmi predmetovej maturitnej komisie.

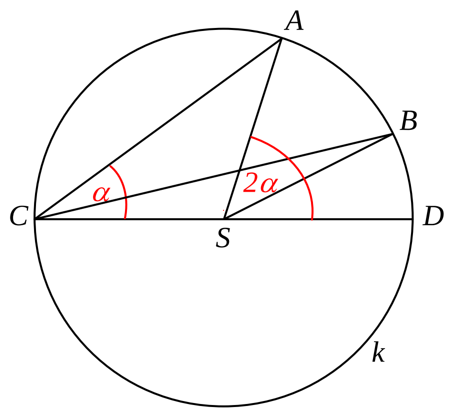
Príklad úlohy č. 2

Planimetria – Základné rovinné útvary

Zdôvodnite tvrdenie o vzťahu stredového a obvodového uhla.

Možné riešenie úlohy č. 2

Zvoľme na kružnici *k* so stredom *S* body *C*, *D* tak, aby tvorili priemer kružnice *k* – pozri obr. 1.



Obr. 1

Ak je A ľubovoľný ďalší bod kružnice k, rôzny od bodov C, D, tak trojuholník ACS je rovnoramenný, a ak označíme α veľkosť uhla ACS, tak

$\alpha = |\sphericalangle CAS|$, teda $|\sphericalangle CSA| = \pi - 2\alpha$, $|\sphericalangle ASD| = 2\alpha$.

Vidíme, že veľkosť uhla *ASD* sa rovná dvojnásobku veľkosti uhla *ACD*.

Zvoľme teraz na kružnici k další bod B $(B \neq A)$.

Predpokladajme najskôr, že body A, B ležia v tej istej polrovine ohraničenej priamkou CD.

Môžeme predpokladať, že $\beta = |\sphericalangle BCD|$ je menší ako $\alpha = |\sphericalangle ACD|$,

inak by stačilo vymeniť body A, B.

Tak ako platí $|\sphericalangle ASD| = 2|\sphericalangle ACD|$, platí aj $|\sphericalangle BSD| = 2|\sphericalangle BCD|$, a teda

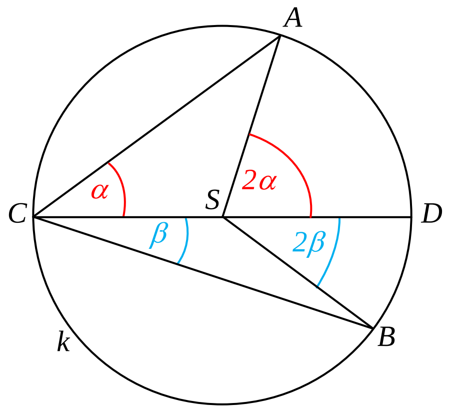
$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| - |\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASD| - \frac{1}{2}|\sphericalangle BSD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASB|$.

Ak ležia body A, B v opačných polrovinách ohraničených priamkou CD (pozri obr. 2),

tak sa podobne $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASD| + \frac{1}{2}|\sphericalangle BSD| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD|)$.

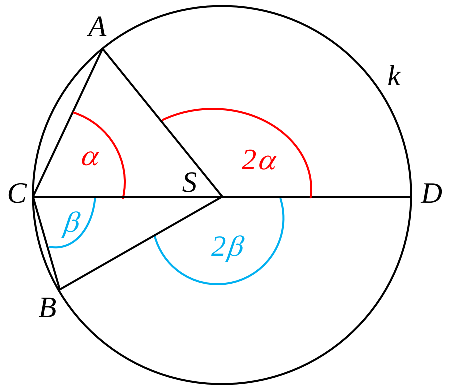
Ak $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD| \leq \pi$, tak $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD| = |\sphericalangle ASB|$

a opäť teda platí $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASB|$.



Obr. 2

Ak je však $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD| > \pi$ (pozri obr. 3), tak sa súčet $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD|$ rovná veľkosti nekonvexného uhla s ramenami SA, SB, čiže uhlu s ramenami SA, SB, ktorý obsahuje väčší oblúk kružnice k ohraničený bodmi A, B.



Obr. 3

Zavedieme preto pojem <u>stredový uhol</u> a <u>obvodový uhol</u>.

Zvoľme na kružnici k so stredom S dva rôzne body A, B.

Body *A*, *B* delia kružnicu *k* na dva oblúky, zvoľme si jeden z nich a označme ho *m*.
Uhol (konvexný alebo nekonvexný) s ramenami *SA*, *SB*, ktorý obsahuje oblúk *m*, sa nazýva **stredový uhol** prislúchajúci kružnicovému oblúku *m*.
Ak je *C* bod kružnice *k*, ktorý neleží na oblúku *m*, nazýva sa uhol *ACD* **obvodový uhol** prislúchajúci k oblúku *m*.
Tým sme dokázali, že veľkosť každého obvodového uhla prislúchajúceho k oblúku *m* sa rovná jednej polovici veľkosti stredového uhla prislúchajúceho k oblúku *m*.

Charakteristika úlohy č. 3

Úloha č. 3 – Úloha je zameraná na postup riešenia príslušnej úlohy s rôznymi alternatívami. Prípadné vopred pripravené doplňujúce otázky budú zamerané na alternatívy pri iných číselných zadaniach.

Príklad úlohy č. 3

Funkcie – Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = log_5(x-2)$ a načrtnite graf funkcie f aj f^{-1}.

Možné riešenie úlohy č. 3

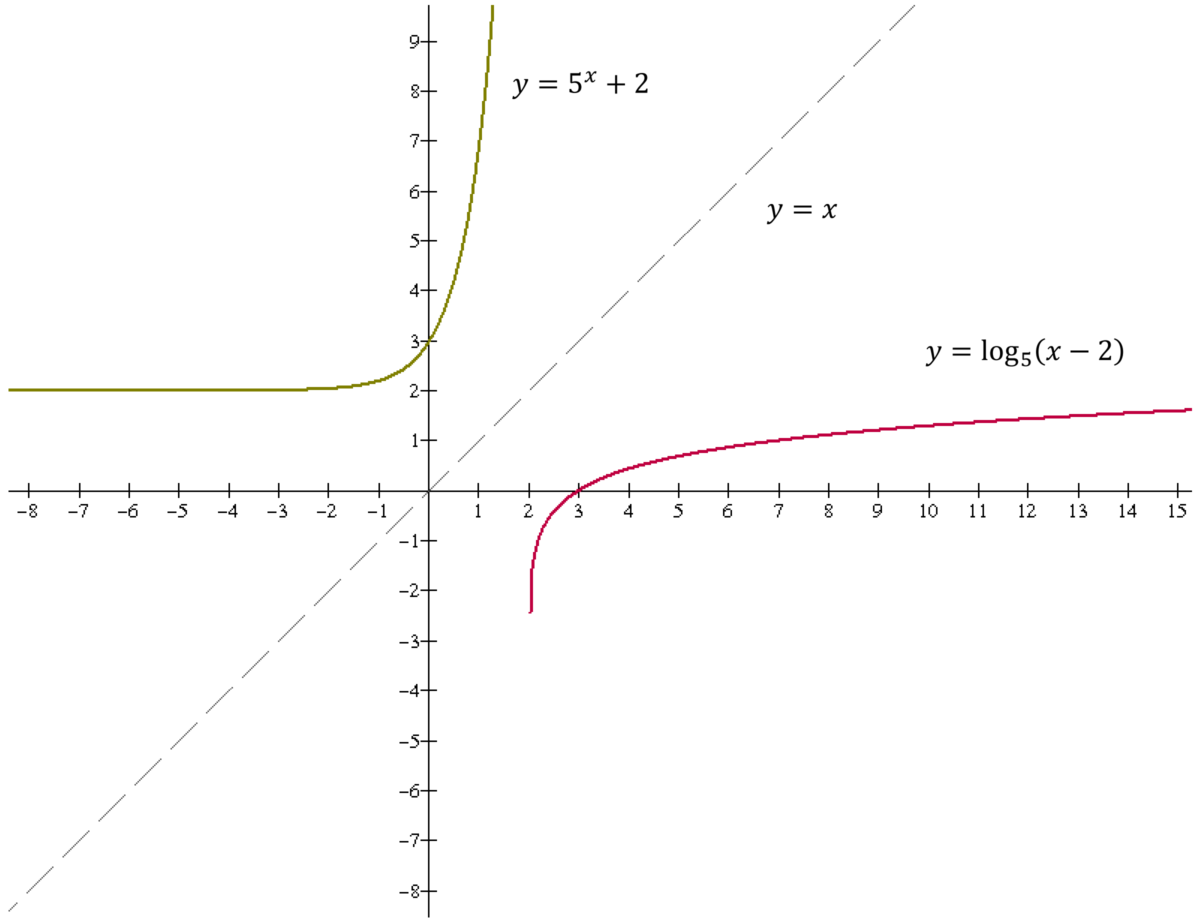
Definičný obor $D(f)$: $x - 2 > 0 \Rightarrow D(f) = (2,\infty)$. Obor hodnôt $H(f) = R$.

Nech $x_{1,} x_2 \in D(f)$ a platí $x_1 < x_2$. Potom $x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow log_5(x_1 - 2) < log_5(x_2 - 2)$, t.j. ukázali sme, že pre všetky $x_1 < x_2$ z intervalu $(2,\infty)$ platí $f(x_1) < f(x_2)$. V zmysle definície môžeme tvrdiť, že daná funkcia $f(x)$ je rastúca na celom definičnom obore, a preto je aj prostá.

K nej inverzná funkcia $f^{-1}(x)$: $x = log_5(y-2) \Rightarrow y - 2 = 5^x$.

Odtiaľ $f^{-1}(x)$: $y = 5^x + 2$, $D(f^{-1}) = R$, $H(f^{-1}) = (2,\infty)$.

Graf funkcie $f^{-1}(x)$ je symetrický s grafom funkcie $f(x)$ vzhľadom na priamku $y = x$.



$y = 5^x + 2$
$y = x$
$y = \log_5(x-2)$