Charakteristika úlohy č. 1

> ***Úloha č. 1*** – Žiak objasní (definuje) dané pojmy, uvedie ich príklady a kontrapríklady, sformuluje ich vlastnosti a súvislosti medzi uvedenými pojmami. Prevláda forma monológu.

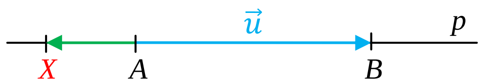
Príklad úlohy č. 1

Planimetria – Analytická geometria v rovine

Parametrické rovnice priamky, všeobecná rovnica priamky, vzťah pre výpočet veľkosti uhla dvoch priamok, vzťah medzi koeficientami všeobecných rovníc dvoch kolmých priamok.

Možné riešenie úlohy č. 1

Priamka p je určená dvomi rôznymi bodmi. Označme si ich napríklad A a B.
Tieto dva body určujú smerový vektor priamky p, ktorý označíme $\vec{u}$,
pričom môžeme zapísať $\vec{u} = B - A$.
Smerový vektor priamky p je nenulový vektor, ktorý môžeme na priamku p umiestniť.
Priamka p má nekonečne veľa smerových vektorov, ktoré sa dajú na ňu umiestniť.
Sú lineárne závislé, teda každý z nich je násobkom vektora $\vec{u}$.



Ak si na priamke p zvolíme ľubovoľný bod X, kde $X \neq A$, vektor $X - A$ bude násobkom smerového vektora $\vec{u}$. Označme si tento násobok t, pričom $t \in \mathbb{R}$.
Potom môžeme písať $X - A = t \cdot \vec{u}$, pričom smerový vektor $\vec{u}$ nemôže byť nulový.
Po úprave dostaneme parametrické vyjadrenie priamky v rovine:
$X = A + t \cdot \vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, kde t nazývame *parameter*.

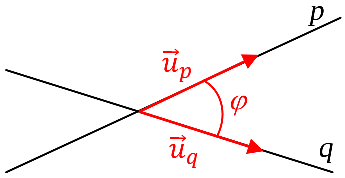
Parametrické vyjadrenie priamky p sa dá prepísať do predpisov na výpočet súradníc.
Nech bod A má súradnice $A = [a_1; a_2]$ a smerový vektor $\vec{u}$ má súradnice $\vec{u} = (u_1; u_2)$.
Súradnice bodu X označíme ako $X = [x; y]$.
Parametrické rovnice priamky sú:
$\boldsymbol{x = a_1 + tu_1}$
$\boldsymbol{y = a_2 + tu_2, t} \in \mathbb{R}$
Z týchto rovníc dostaneme všeobecnú rovnicu priamky p v rovine tak, že z prvej rovnice vyjadríme parameter t a dosadíme do druhej rovnice:

$x = a_1 + tu_1$
$x - a_1 = tu_1$
$t = \frac{x-a_1}{u_1}$, kde $u_1 \neq 0$.
$y = a_2 + tu_2$
$y = a_2 + \dfrac{x - a_1}{u_1} \cdot u_2$
Odstránime zlomok a dostaneme $u_1 y = u_1 a_2 + (x - a_1)u_2$.
Roznásobíme zátvorku a členy rovnice dáme na ľavú stranu $-u_2 x + u_1 y - u_1 a_2 + u_2 a_1 = 0$.

V tejto rovnici sú premenné x a y, ostatné sú konštanty.
Konštantu pri x nazveme a, konštantu pri y nazveme b a ostatné označíme ako c.
$-u_2x + u_1y + (-u_1a_2 + u_2a_1) = 0$

Všeobecná rovnica priamky v rovine je:
$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, kde $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$, pričom $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

Uvedieme vzťah pre výpočet veľkosti uhla dvoch priamok v rovine pomocou skalárneho súčinu.
Na obrázku sú dve rôznobežné priamky p, q, ktoré zvierajú uhol φ, pričom $\varphi \epsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Ich smerové vektory $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ umiestnime tak, aby mali začiatok v priesečníku oboch priamok.

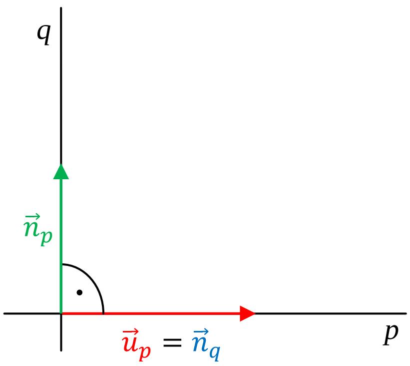


Veľkosť uhla dvoch priamok p, q v rovine vypočítame podľa vzťahu $\boldsymbol{\cos\varphi} = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{|\vec{u}_p||\vec{u}_q|}$,

pričom v čitateli zlomku je absolútna hodnota skalárneho súčinu smerových vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$ a v menovateli zlomku je súčin veľkostí smerových vektorov $\vec{u}_p$ a $\vec{u}_q$.
Vo všeobecnosti možno veľkosť vektora $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vypočítať podľa vzťahu
$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Uvedieme vzťah medzi koeficientami všeobecných rovníc dvoch kolmých priamok p a q.

Vo všeobecnej rovnici priamky p: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ sú a, b súradnice normálového vektora priamky p, ktorý je kolmý na priamku p, a tým aj na smerový vektor priamky p.
Platí teda $\vec{n}_p = (a, b)$. Na obrázku je smerový vektor priamky p označený $\vec{u}_p$ a normálový vektor priamky p označený $\vec{n}_p$.



Vo všeobecnej rovnici priamky q vystupuje normálový vektor $\vec{n}_q$, ktorý je smerovým vektorom pre priamku p. Normálové vektory oboch priamok sú na seba kolmé, preto sa ich skalárny súčin rovná nule. Platí teda $\boldsymbol{\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 0}$. Ak $\vec{n}_p = (a, b)$, potom $\vec{n}_q = (-b, a)$,
pretože $(a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0$.
Všeobecná rovnica priamky q je $\boldsymbol{-bx + ay + c = 0}$.

Charakteristika úlohy č. 2

Úloha č. 2 – Úloha je zameraná na argumentáciu a dôvodenie. Prevláda forma dialógu s členmi predmetovej maturitnej komisie.

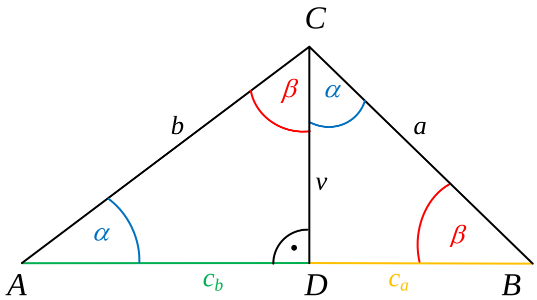
Príklad úlohy č. 2

Planimetria – Základné rovinné útvary

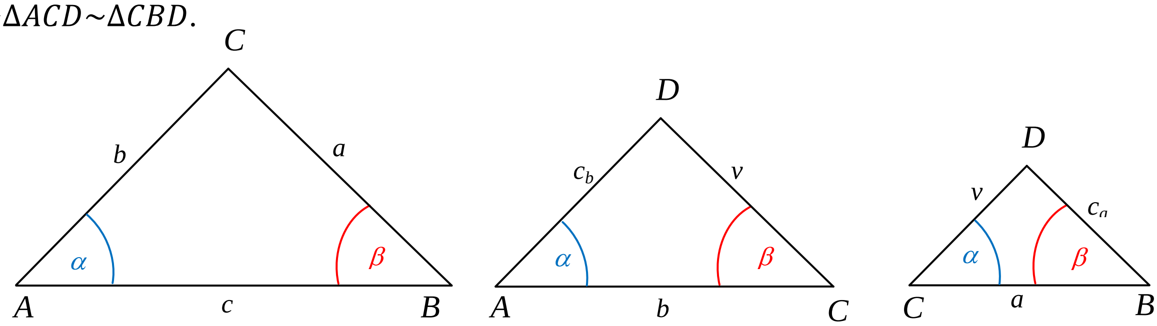
Odvoďte Pytagorovu vetu a Euklidove vety.

Možné riešenie úlohy č. 2

Najprv odvodíme Euklidove vety.
V pravouhlom trojuholníku *ABC*, s pravým uhlom pri vrchole *C*, vedieme bodom *C* výšku na preponu *AB*. Pätu tejto výšky označíme *D*, $|DA| = c_b$, $|DB| = c_a$, $|CD| = v$ (pozri obrázok).



Ak označíme ešte α, β veľkosti uhlov tohto trojuholníka pri vrcholoch *A*, *B*, tak $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.
Súčet veľkostí ostrých uhlov v pravouhlom trojuholníku *ADC* sa tiež rovná $\frac{\pi}{2}$, preto $\sphericalangle ACD = \beta$ a podobne dokážeme, že $\sphericalangle DCB = \alpha$.
Vidíme, že každé dva z pravouhlých trojuholníkov *ABC*, *ACD*, *CBD* sú podobné, presnejšie: $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$.



Platí:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c_b}{b}\text{, čiže } \boldsymbol{b^2 = c \cdot c_b} \\[2ex] \Delta ABC \sim \Delta CBD \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}\text{, čiže } \boldsymbol{a^2 = c \cdot c_a} \end{array}\right\}$$

Euklidove vety o odvesne pravouhlého trojuholníka

$$\Delta ACD \sim \Delta CBD \Rightarrow \frac{c_b}{v} = \frac{v}{c_a}\text{, čiže } \boldsymbol{v^2 = c_a \cdot c_b} \longrightarrow$$

Euklidova veta o výške v pravouhlom trojuholníku

Odvodili sme tzv. Euklidove vety o odvesne a o výške, ktoré platia pre každý pravouhlý trojuholník.
Keďže $c_a + c_b = c$, sčítaním Euklidových viet o odvesnách dostaneme **Pytagorovu vetu** $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$, ktorá hovorí, že v každom pravouhlom trojuholníku sa súčet druhých mocnín dĺžok odvesien rovná druhej mocnine dĺžky prepony.

Charakteristika úlohy č. 3

Úloha č. 3 – Úloha je zameraná na postup riešenia príslušnej úlohy s rôznymi alternatívami. Prípadné vopred pripravené doplňujúce otázky budú zamerané na alternatívy pri iných číselných zadaniach.

Príklad úlohy č. 3

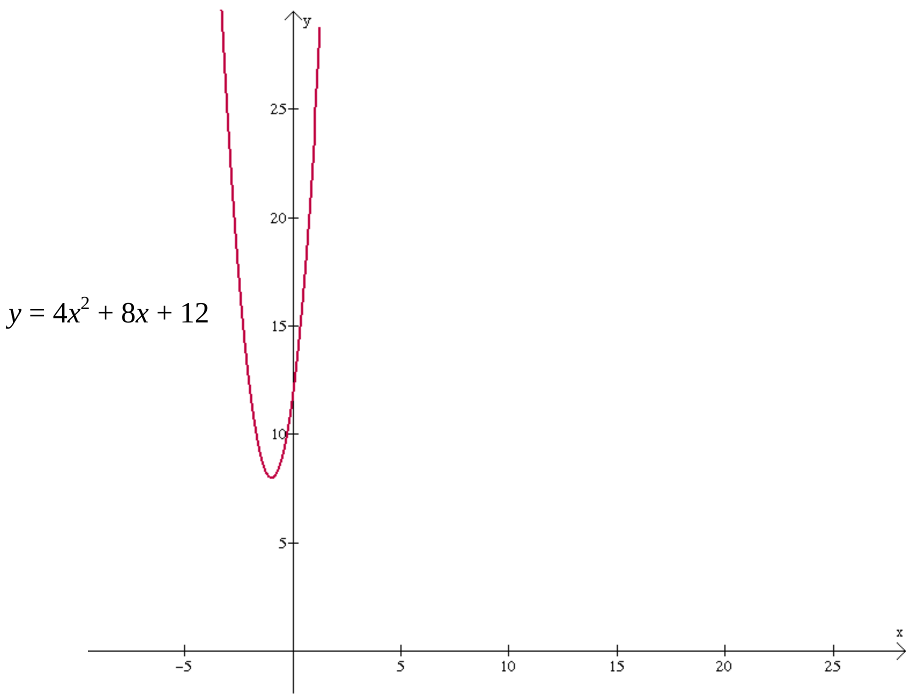
Funkcie – Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

a) Načrtnite graf kvadratickej funkcie s rovnicou $f(x) = 4x^2 + 8x + 12$, pričom $D(f) = \mathbb{R}$.

b) Zistite, či funkcia $f(x) = x^2 - 2x + 1$ je párna alebo nepárna.

Možné riešenie úlohy č. 3

a) Grafom kvadratickej funkcie určenej rovnicou $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, je parabola.
Keďže a = 4 a 4 > 0, tak parabola bude „otvorená smerom hore". Rovnicu danej kvadratickej funkcie upravíme na štvorec, t. j. na tvar, z ktorého vieme určiť súradnice vrcholu paraboly.
Prvé dva členy doplníme do štvorca, teda do druhej mocniny vhodného dvojčlena.
$f(x) = 4x^2 + 8x + 12 = 4(x^2 + 2x + 3) = 4(x^2 + 2x + 1 - 1 + 3) = 4((x+1)^2 + 2) =$
$= 4(x+1)^2 + 8$. Z takto upravenej rovnice funkcie vidíme, že vrchol paraboly $V = (-1, 8)$.



b) Definičným oborom funkcie $f(x) = x^2 - 2x + 1$ je množina všetkých reálnych čísel.

Stačí počítať $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 1 = x^2 + 2x + 1$.

Výsledný výraz sa nerovná ani hodnote $f(x)$ ani hodnote $-f(x)$.

Teda uvedená funkcia nie je ani párna ani nepárna.