Charakteristika úlohy č. 1

Úloha č. 1 – Žiak objasní (definuje) dané pojmy, uvedie ich príklady a kontrapríklady, sformuluje ich vlastnosti a súvislosti medzi uvedenými pojmami. Prevláda forma monológu.

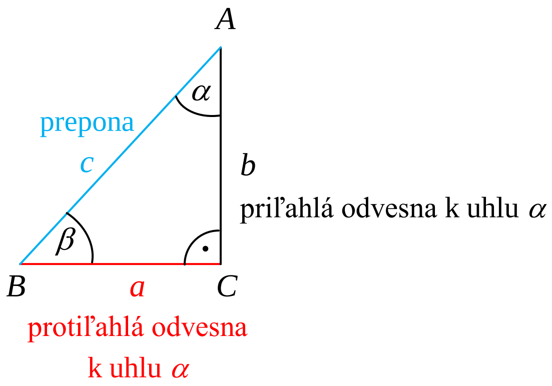
Príklad úlohy č. 1

Planimetria – Základné rovinné útvary

Goniometria pravouhlého trojuholníka, kosínusová a sínusová veta.

Možné riešenie úlohy č. 1

V pravouhlom trojuholníku definujeme goniometrické funkcie ostrého uhla nasledovne.



Sínus ostrého uhla α v pravouhlom trojuholníku *ABC* je **pomer dĺžky protiľahlej odvesny k dĺžke prepony**.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

Kosínus ostrého uhla α v pravouhlom trojuholníku *ABC* je **pomer dĺžky priľahlej odvesny k dĺžke prepony**.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

Tangens ostrého uhla α v pravouhlom trojuholníku *ABC* je **pomer dĺžok protiľahlej a priľahlej odvesny**.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Kotangens ostrého uhla α v pravouhlom trojuholníku *ABC* je **pomer dĺžok priľahlej a protiľahlej odvesny**.

$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

Podobne vieme vyjadriť sínus, kosínus, tangens a kotangens ostrého uhla β v pravouhlom trojuholníku *ABC*.

$\sin\beta = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}\,\beta = \frac{a}{b}$

Porovnáme hodnoty goniometrických funkcií pre ostré uhly α a β v tom istom pravouhlom trojuholníku *ABC*.

$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$

$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta = \frac{a}{b}$

$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

V uvedených rovnostiach vyjadríme uhol β cez uhol α.
Keďže uhol $\gamma = 90°$ a súčet $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, tak $\alpha + \beta = 90°$, a teda $\beta = 90° - \alpha$.
Dostaneme nasledujúce vzťahy:

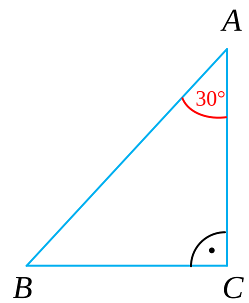
$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$

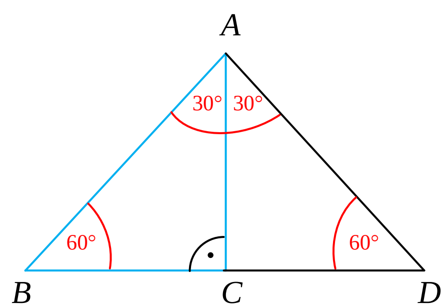
$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}(90° - \alpha) = \frac{a}{b}$

$\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{b}{a}$

Vyjadríme hodnoty goniometrických funkcií pre uhol $\alpha = 30°$ ako pomery dĺžok strán pravouhlého trojuholníka *ABC*. Nasledovné obrázky sú len ilustračné (veľkosti uhlov nezodpovedajú zadaniu).



Pravouhlý trojuholník *ABC* možno chápať ako jeden z dvoch zhodných trojuholníkov, na ktoré je rozdelený rovnostranný trojuholník *ABD* – viď. obrázok:



V rovnostrannom trojuholníku *ABD* majú všetky vnútorné uhly veľkosť 60° a všetky tri strany sú rovnako dlhé.

Ak dĺžku strany tohto rovnostranného trojuholníka *ABD* označíme ako premennú *x*, vieme vyjadriť všetky strany v pravouhlom trojuholníku *ABC*.

V pravouhlom trojuholníku *ABC* ak $c = x$, tak $a = \frac{x}{2}$.

Dĺžku strany *AC* vypočítame pomocou Pytagorovej vety $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + b^2 = x^2$.

Z toho $b^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$.

Po odmocnení dostaneme $b = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Vyjadríme hodnoty goniometrických funkcií pre uhol 30° a následne pre uhol 60°.

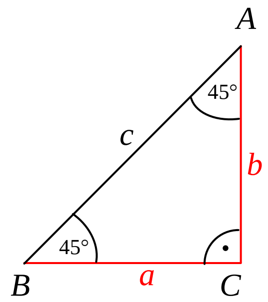
$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$ z toho vyplýva, že $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ z toho vyplýva, že $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{a}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ z toho vyplýva, že $\mathrm{cotg}\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{cotg}\, 30° = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$ z toho vyplýva, že $\mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3}$

Vyjadríme hodnoty goniometrických funkcií pre uhol $\alpha = 45°$ ako pomery strán pravouhlého rovnoramenného trojuholníka *ABC*.



Ak dĺžku ramena tohto rovnoramenného trojuholníka *ABC* označíme ako premennú *x*, tak platí $a = b = x$.

Dĺžku strany *AB* vypočítame pomocou Pytagorovej vety $c^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$.

Po odmocnení dostaneme $c = \sqrt{2}x$.

Vyjadríme hodnoty goniometrických funkcií pre uhol 45°.

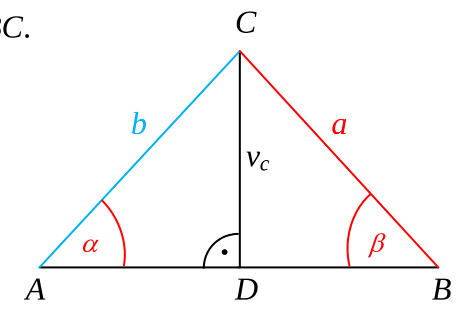
$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\, 45° = \frac{a}{b} = \frac{x}{x} = 1$

$\text{cotg}\, 45° = \frac{b}{a} = \frac{x}{x} = 1$

Odvodíme sínusovú vetu z ostrouhlého trojuholníka *ABC*.



Predpokladajme, že v trojuholníku *ABC* poznáme uhly α a β, ako aj dĺžku strany a.

Vypočítame dĺžku strany b pomocou výšky na stranu c.

V trojuholníku *ADC* platí $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}$. V trojuholníku *BDC* platí $\sin \beta = \frac{v_c}{a}$.

Z oboch vzťahov vyjadríme výšku na stranu c a dostaneme: $v_c = b \sin \alpha$, $v_c = a \sin \beta$.

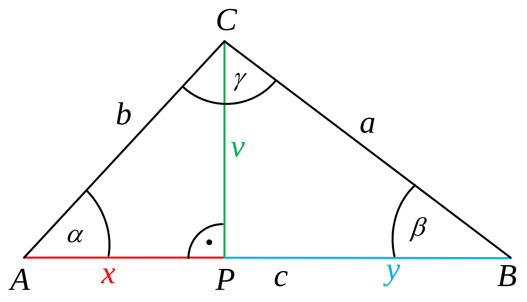
Keďže výrazy na pravých stranách týchto vyjadrení sa musia rovnať, dostaneme $\boldsymbol{b \sin \alpha = a \sin \beta}$.

Rovnicu vydelíme b a $\sin \beta$ a dostaneme vyjadrenie pre sínusovú vetu $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$.

Analogicky sa dajú odvodiť aj ďalšie tvary sínusovej vety $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$ a $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$.

Myšlienka odvádzania je rovnaká, keď zoberieme ktorékoľvek iné dva uhly a k nim protiľahlé strany.

Odvodíme kosínusovú vetu ako vyjadrenie kosínusov uhlov trojuholníka pomocou dĺžok strán.



Trojuholník *ABC* je rozdelený výškou v na dva pravouhlé trojuholníky: *APC* a *BPC*.

V trojuholníku *APC* platí Pytagorova veta $b^2 = x^2 + v^2$, z ktorej vyplýva, že $\boldsymbol{v^2} = b^2 - x^2$.

V trojuholníku *BPC* platí Pytagorova veta $a^2 = y^2 + v^2$, z ktorej vyplýva, že $\boldsymbol{v^2} = a^2 - y^2$.

Z obidvoch vyjadrení pre $\boldsymbol{v^2}$ dostaneme rovnosť $b^2 - x^2 = a^2 - y^2$.

Z obrázka vidíme, že $x + y = c$, z toho vyplýva, že $y = c - x$.

Takže $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$.

Umocníme dvojčlen na pravej strane rovnice a dostaneme $b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$.

Po odstránení zátvoriek $b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$.

K obom stranám rovnice pripočítame x^2 a dostaneme $b^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 + x^2$.

Takže $b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$.

Obe strany rovnice vynásobíme číslom – 1 a vznikne $-b^2 = -a^2 + c^2 - 2cx$.

Z toho $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2cx}$, čo je čiastočný vzťah pre kosínusovú vetu.

Použijeme funkciu kosínus definovanú pre pravouhlý trojuholník *APC*, a teda $\cos\alpha = \frac{x}{b}$.

Z toho $x = b\cos\alpha$.

Dostaneme jeden z troch vzťahov pre kosínusovú vetu $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$

Ďalšie vzťahy pre kosínusovú vetu odvodíme analogicky:

$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$

$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

Kosínusovú vetu možno využiť pri výpočte veľkosti ktoréhokoľvek vnútorného uhla trojuholníka, ak poznáme dĺžky všetkých troch strán tohto trojuholníka.

Vtedy upravíme vzťah $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$ tak, že vyjadríme z neho kosínus uhla α.

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos\alpha$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

Analogicky:

$$\boldsymbol{\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$\boldsymbol{\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

Charakteristika úlohy č. 2

Úloha č. 2 – Úloha je zameraná na argumentáciu a dôvodenie. Prevláda forma dialógu s členmi predmetovej maturitnej komisie.

Príklad úlohy č. 2

Základy matematiky – Logika a množiny

Dokážte výrok: $\sqrt{3}$ *je iracionálne číslo.*

Možné riešenie úlohy č. 2

Dokazovať budeme sporom.

Ak chceme dokazovať pravdivosť výroku *V* sporom, vyjdeme z jeho negácie.

Predpokladáme, že táto negácia platí a snažíme sa dokázať, že je to v spore so známymi tvrdeniami.

Ak negácia výroku neplatí, potom platí pôvodný výrok.

Pôvodný výrok má tvar: *V*: $\sqrt{3}$ *je iracionálne číslo.*.

Negácia výroku *V* má tvar: *V′*: $\sqrt{3}$ *je racionálne číslo.*.

Keď $\sqrt{3}$ je racionálne číslo, dá sa napísať v tvare zlomku v základnom tvare.

Teda $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, kde *p, q* sú nesúdeliteľné prirodzené čísla.

Obe strany rovnosti umocníme na druhú, pričom dostaneme $3 = \frac{p^2}{q^2}$.

Potom násobením menovateľom q^2 odstránime zlomok a dostaneme $3 \cdot q^2 = p^2$.

Z poslednej rovnosti vyplýva, že číslo p^2 je deliteľné číslom 3.

Ak je teda číslom 3 deliteľné číslo p^2, tak je číslom 3 deliteľné aj číslo p.

Ak je číslo *p* deliteľné číslom 3, tak existuje také prirodzené číslo *k*, že $p = 3 \cdot k$.

Toto vyjadrenie dosadíme do vzťahu $p^2 = 3 \cdot q^2$ a dostaneme $(3 \cdot k)^2 = 3 \cdot q^2$.

Po umocnení ľavej strany rovnosti dostaneme $9 \cdot k^2 = 3 \cdot q^2$.

Obe strany rovnosti vydelíme číslom 3 a dostaneme $3 \cdot k^2 = q^2$.

Ak $q^2 = 3 \cdot k^2$, tak to znamená, že číslo q^2 je deliteľné číslom 3.

Ak je teda číslom 3 deliteľné číslo q^2, tak je číslom 3 deliteľné aj číslo q.

Z toho vyplýva, že aj číslo *p* aj číslo *q* sú deliteľné číslom 3, takže sú súdeliteľné.

Ale podľa predpokladu sú nesúdeliteľné. Došli sme teda k sporu.

To znamená, že znegovaný výrok neplatí.

Potom ale platí pôvodný výrok: $\sqrt{3}$ *je iracionálne číslo*..

Charakteristika úlohy č. 3

Úloha č. 3 – Úloha je zameraná na postup riešenia príslušnej úlohy s rôznymi alternatívami. Prípadné vopred pripravené doplňujúce otázky budú zamerané na alternatívy pri iných číselných zadaniach.

Príklad úlohy č. 3

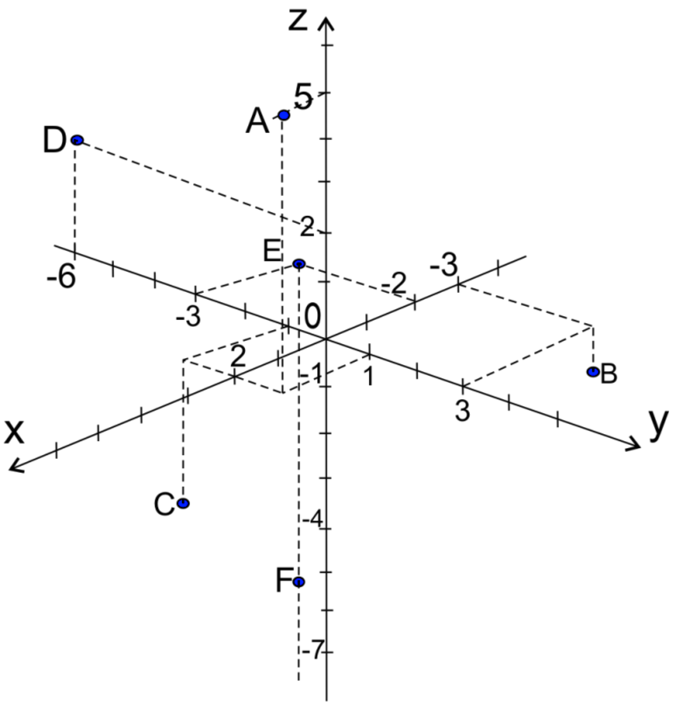
Stereometria – Súradnicová sústava v priestore

a) Vo zvolenej súradnicovej sústave v priestore zostrojte obrazy bodov, ak poznáte ich súradnice: $A = (2, 1, 5)$, $B = (-3, 3, -1)$, $C = (2, -1, -4)$, $D = (0, -6, 2)$, $E = (-2, -3, 0)$, $F = (-2, -3, -7)$.

b) Určte súradnice vrcholov kvádra s rozmermi $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, ktorý má jeden vrchol v začiatku karteziánskej súradnicovej sústavy, tri steny v súradnicových rovinách a súradnice vrcholov sú nezáporné.

Možné riešenie úlohy č. 3

a)



b) $A = (4, 0, 0)$, $B = (4, 3, 0)$, $C = (0, 3, 0)$, $D = (0, 0, 0)$, $E = (4, 0, 5)$, $F = (4, 3, 5)$, $G = (0, 3, 5)$, $H = (0, 0, 5)$.