

ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV

**CIEĽOVÉ POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI
A ZRUČNOSTI MATURANTOV
Z MATEMATIKY**

BRATISLAVA 2009

ÚVOD

Cieľové požiadavky z matematiky sú rozdelené na časti *Obsah* a *Požiadavky na vedomosti a zručnosti*.

Text v jednotlivých častiach vytlačený *obyčajnou kurzívou* predstavuje odvolávky, vysvetlivky a komentáre.

V každej kapitole sú v odseku *Obsah* (rozdelenom spravidla na 2 menšie časti s názvami *Pojmy* a *Vlastnosti a vzťahy*) vymenované termíny a vzťahy (vzorce, postupy, tvrdenia), ktoré má žiak ovládať. Toto ovládanie v prípade *pojmov* znamená, že žiak

- rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú,
- vie ich správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí,
- vie ich stručne opísať (definovať).

V prípade *vlastností a vzťahov* ovládaním rozumieme žiakovu schopnosť vybaviť si tieto vzťahy v mysli (bez toho, aby mu bolo potrebné pripomínať konkrétnu podobu uvedeného vzťahu, postupu, či tvrdenia) a použiť ich pri riešení danej úlohy (pričom spôsob tohto použitia špecifikuje časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti*, o ktorej hovoríme nižšie). Kvôli prehľadnosti neuvádzame úplné znenie jednotlivých vzťahov so všetkými predpokladmi a podmienkami, ale len takú ich podobu, z ktorej je jasné, aké tvrdenie máme na mysli.

Pokiaľ sa v zadaniach úloh alebo otázok, ktoré má žiak riešiť alebo zodpovedať, vyskytnú pojmy, ktoré nie sú uvedené v časti *Obsah*, bude potrebné ich v texte zadania vysvetliť. Rovnako tak v prípade, že zadanie vyžaduje použitie postupu alebo vzťahu, ktorý nie je zahrnutý do časti *Obsah*, musí byť žiakovi k dispozícii opis požadovaného postupu alebo vzťahu (tento opis však nemusí byť súčasťou zadania, môže byť napríklad uvedený vo “vzorčekovníku”, ktorý bude priložený k celému súboru zadání). Výnimku z tohto pravidla predstavuje situácia, keď riešením úlohy má byť *objavenie* alebo *odvodenie* takého vzťahu, ktorý nebol uvedený v odseku *Vlastnosti a vzťahy*.

Časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* opisuje v každej kapitole činnosti, ktoré má byť žiak schopný správne realizovať. V texte používanú formuláciu “*žiak vie...*” pritom chápeme v zmysle “*žiak má vedieť...*”; podobne formulácia “*... pokiaľ (ak) žiak vie...*” znamená “*... ak je v týchto cieľových požiadavkách uvedené, že žiak má vedieť...*”. Teda napríklad text “*žiak vie nájsť všetky riešenia nerovnice $f(x) \leq a$, pokiaľ vie riešiť rovnicu $f(x) = a$ a súčasne vie načrtnúť graf funkcie f* ” (ktorý čitateľ nájde v kapitole 1.4) treba chápať tak, že na inom mieste týchto cieľových požiadaviek je špecifikované, grafy ktorých funkcií f má žiak vedieť načrtnúť, a pre ktoré funkcie f má žiak vedieť riešiť rovnicu $f(x) = a$. Podobnú úlohu plní odvolávka “*pozri...*”; napríklad v texte “*žiak vie nájsť definičný obor danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*” táto odvolávka upozorňuje, že stupeň náročnosti, na ktorom má žiak zvládnuť určovanie definičného oboru funkcie, je daný náročnosťou rovníc a nerovnic, ktoré pri tom musí vyriešiť, pričom táto náročnosť je opísaná v časti 1.4. Odvolávka “*pozri tiež...*” upozorňuje čitateľa, že uvedený pojem alebo činnosť sa vyskytuje aj na inom mieste tohto textu.

Žiak by mal byť schopný riešiť *úlohy komplexného charakteru*, teda úlohy, ktorých riešenie vyžaduje spojenie *nevelkého počtu* činností opísaných v týchto cieľových požiadavkách (pritom nevylučujeme spájanie činností opísaných v rôznych kapitolách); napr. pri riešení “klasickej” slovnej úlohy by mal žiak zvládnuť formuláciu príslušného problému v reči matematiky, jeho vyriešenie prístupnými matematickými prostriedkami a formuláciu odpovede opäť v reči pôvodného slovného zadania. Jednotlivé činnosti uvedené v časti *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* predstavujú teda len akési “tehlíčky” či “základné stavebné kamene”, pričom riešenie jedného konkrétneho zadania môže vyžadovať i použitie a spojenie viacerých takýchto “tehlíčiek”.

V snahe o ucelenosť jednotlivých kapitol uvádzame tie pojmy a zručnosti, ktoré súvisia s viacerými kapitolami, v každej z nich. Z toho istého dôvodu sú do textu zaradené i niektoré pojmy, vzťahy a činnosti, ktoré sú obsahom učiva základnej školy.

Vyznačené (zvýraznené) učivo sa v prechodnom období 2012 – 2016 nebude testovať v externej časti maturitnej skúšky.

1 ZÁKLADY MATEMATIKY

1.1 Logika a množiny

Obsah

Pojmy:

výrok, axióma, definícia, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, **obmena implikácie**, **obrátaná implikácia**, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve), priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, množina, prvky množiny, podmnožina, nadmnožina, prienik, zjednotenie a rozdiel množín, Vennove diagramy, **disjunktné množiny**, prázdna množina, doplnok množiny, konečná a nekonečná množina, **počet prvkov množiny**.

Vlastnosti a vzťahy:

- Implikácia (výrok) $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou (výrokom) $B' \Rightarrow A'$ (výrok z A vyplýva B platí práve vtedy, keď platí výrok z negácie B vyplýva negácia A),
- výroky A, B sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$,
- negácia konjunkcie (disjunkcie) je disjunkcia (konjunkcia) negácií,
- implikácia $A \Rightarrow B$ je nepravdivá práve vtedy, keď je pravdivý výrok A a nepravdivý výrok B ,
- pravdivosť zložených výrokov a negácie (“*tabuľka pravdivostných hodnôt*”),
- negácia výroku $\forall x \in M$ platí $V(x)$ je $\exists x \in M$, pre ktoré neplatí $V(x)$,
- negácia výroku $\exists x \in M$, pre ktoré platí $V(x)$ je $\forall x \in M$ neplatí $V(x)$,
- $A = B$ práve vtedy, keď súčasne platí $A \subset B, B \subset A$,
- pre počty prvkov zjednotenia dvoch množín platí $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- rozlíšiť používanie logických spojok a kvantifikátorov vo vyjadrovaní sa v bežnom živote na jednej strane a v rovine zákonov, nariadení, zmlúv, návodov, matematiky na strane druhej,
- zistiť pravdivostnú hodnotu zloženého výroku (vytvoreného pomocou negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie) z pravdivostných hodnôt jednotlivých zložiek (*teda napísať pre danú situáciu príslušný riadok “tabuľky pravdivostných hodnôt”*),
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či je výrok negáciou daného výroku, vytvoriť negáciu zloženého výroku (nie len pomocou “*nie je pravda, že ...*”),
- v jednoduchých prípadoch zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov, charakteristickou vlastnosťou **alebo množinovými operáciami**,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o konečnosti či nekonečnosti danej množiny,
- opísať základné druhy dôkazov (priamy, nepriamy, sporom) a dokumentovať ich príkladmi,
- **použiť základné druhy dôkazov pri dokazovaní jednoduchých tvrdení**,
- určiť zjednotenie, prienik a rozdiel množín i doplnok množiny A (ak A je podmnožinou B) vzhľadom na množinu B (*intervaly pozri v 1.2 Čísla, premenné a výrazy*),
- použiť vzťah pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín pri hľadaní počtu prvkov týchto množín, resp. ich prieniku alebo zjednotenia,
- pri riešení úloh o množinách použiť ako pomôcku Vennove diagramy (pre 2 – 4 množiny).

1.2 Čísla, premenné a výrazy

Obsah

Pojmy:

konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, rovnosť výrazov, hodnota výrazu, mnohočlen, stupeň mnohočlena, doplnenie do štvorca (*pre kvadratický mnohočlen*), člen mnohočlena, vynímanie pred zátvorku, úprava na súčin, krátenie výrazu, prirodzené (N), celé (Z), nezáporné (N_0), záporné (Z^-), racionálne (Q), iracionálne (I), reálne (R) čísla, n -ciferné číslo, zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara), desatinný rozvoj (konečný, nekonečný a periodický), číslo π , nekonečno, číselná os, znázorňovanie čísel, komutatívny, asociatívny a distributívny zákon, odmocnina (druhá), n -tá odmocnina, mocnina (s prirodzeným, celočíselným, **racionálnym** exponentom), exponent a základ mocniny, základ logaritmu, absolútna hodnota čísla, úmera (priama a nepriama), pomer, percento, promile, základ (*pre počítanie s percentami*), faktoriál, kombinačné číslo, desiatková sústava, dekadický zápis, interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený).

Vlastnosti a vzťahy:

- $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$, $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$, $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$),
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $c^0 = 1$, $a, b \geq 0$, $c > 0$, $x, y \in Z, Q$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0$, $m, n \in N$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$,
- $|x - a|$ je vzdialenosť obrazov čísel x a a na číselnej osi,
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$,
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$,
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $b > 0$,
- $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y > 0$,
- $\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$,
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, pre prirodzené čísla n , $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, pre prirodzené čísla n a nezáporné celé čísla k , nie väčšie ako n ,
- práve racionálne čísla majú desatinný periodický rozvoj,
- $R = Q \cup I$, $Q \cap I = \{ \}$, $Z = N \cup Z^- \cup \{0\}$, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

(čísła)

- zaokrúhľovať čísla,
- upraviť reálne číslo na tvar $\pm a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo a a číslo z intervalu $\langle 1, 10 \rangle$,
- vypočítať absolútnu hodnotu reálneho čísla,
- zapísať vzdialenosť na číselnej osi pomocou absolútnej hodnoty,
- znázorňovať čísla na číselnú os, porovnávať čísla na číselnej osi, odčítat čísla z číselnej osi,
- pre konkrétne n všeobecne zapísať n -ciferné číslo,
- na približný výpočet číselných výrazov a hodnôt funkcií (vrátane $\log_a x$) používať kalkulačku, pričom vie
 - upravovať číselné výrazy na tvar vhodný pre výpočet na kalkulačke,
 - zvoliť vhodný postup, aby mu vyšiel čo najpresnejší výsledok (*napr. pri približnom výpočte $\frac{20!}{10! \cdot 10!}$*),
- pomocou kalkulačky zistiť ostrý uhol, ktorý má danú goniometrickú hodnotu,
- porovnať dve reálne čísla na úrovni presnosti kalkulačky,
- vyjadriť zjednotenie, prienik a rozdiel konečného počtu intervalov pomocou najmenšieho počtu navzájom disjunktných intervalov, jednoprvkových množín a prázdnej množiny,

(výrazy)

- určiť hodnotu výrazu (*dosadiť*) "ručne" alebo pomocou kalkulačky,
- určiť obor definície výrazu (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- odstrániť absolútnu hodnotu rozlišovaním vhodných prípadov (*t.j. $|V(x)| = V(x)$ pre x , pre ktoré $V(x) \geq 0$ a $|V(x)| = -V(x)$ pre x , pre ktoré $V(x) \leq 0$*),
- doplniť kvadratický trojčlen do štvorca (*pozri tiež 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť*),
- upravovať mnohočlen na súčin vynímaním pred zátvorku a použitím vzťahov pre rozklady výrazov $x^2 - y^2$, $x^2 \pm 2xy + y^2$, $ax^2 + bx + c$,
- použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo výrazov s premennými) rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*, roznásobovanie, vynímanie pred zátvorku, krátenie, úpravu zloženého zlomku na jednoduchý,

(práca s premennou)

- používať percentá a úmeru,
- nahradiť premennú vo výraze novým výrazom (*substitúcia, pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- pri priamo závislých veličinách vie vyjadriť jednu pomocou druhej (*pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti*),
- vyjadriť neznámu zo vzorca (*pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti*),
- zapísať slovný text algebraicky (*matematizácia*),
 - zapísať vzťahy (v jednoduchom texte) pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností,
 - zapísať, vyjadriť bežné závislosti v geometrii,
 - v jednoduchých prípadoch odvodiť zo známych vzťahov niektoré nové vzťahy,
- riešiť kontextové (*slovné*) úlohy vedúce k rovniciam a nerovniciam (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*) a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

1.3 Teória čísel

Obsah

Pojmy:

deliteľ, násobok, deliteľnosť, najväčší spoločný deliteľ (NSD), najmenší spoločný násobok (NSN), prvočíslo, zložené číslo, súdeliteľné a nesúdeliteľné čísla, zvyšok, prvočíselný rozklad, prvočiniteľ.

Vlastnosti a vzťahy:

- Znaky deliteľnosti číslom 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zistiť bez delenia, či je dané číslo deliteľné niektorým z čísel uvedených v znakoch deliteľnosti,
- sformulovať a použiť kritériá deliteľnosti niektorými zloženými číslami, ktoré sú súčinom nesúdeliteľných čísel uvedených v znakoch deliteľnosti (napr. 6, 12, 15),
- nájsť NSN, NSD daných čísel,
- nájsť celočíselné riešenia úloh, v ktorých možno jednoduchou úvahou určiť vhodnú konečnú množinu, ktorá hľadané riešenia musí obsahovať (riešenia úlohy potom nájde preverení jednotlivých prvkov získanej konečnej množiny),
- pri riešení jednoduchých úloh využiť pravidelnosť rozloženia násobkov celých čísel na číselnej osi.

1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Obsah

Pojmy:

rovnica, nerovnica, sústava rovníc, sústava nerovnic a ich riešenie, koeficient, koreň, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška) riešenia, (ekvivalentné a neekvivalentné) úpravy rovnice a nerovnice, lineárny, kvadratický člen, koeficient pri lineárnom (kvadratickom) člene.

Vlastnosti a vzťahy:

- Diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$,
- riešením kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ sú $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- vzťah medzi diskriminantom a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice,
- $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$,
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

(rovnice)

- nájsť všetky riešenia lineárnej rovnice $ax + b = 0$ a kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, pričom pozná vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice a koreňovými činiteľmi, počtom riešení,
- nájsť všetky riešenia, resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I (ak sa nedá presne, tak približne s pomocou kalkulačky) rovnice $f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}$ a f je funkcia
 - $x^a, b^x, \log_b x$ ($a \in \mathbb{Q}$, b je kladné číslo rôzne od 1),
 - $|x - a|$,
 - $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$,

a vie určiť, koľko riešení má uvedená rovnica (v závislosti od čísla A , čísel a, b, c , resp. intervalu I)

- použitím danej substitúcie $y = \varphi(x)$ upraviť rovnicu zapísanú v tvare $f(\varphi(x)) = A$ na tvar $f(y) = A$,

špeciálne vie nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I) rovníc

- $f(ax+b)=A$, kde f je funkcia $x^a, b^x, \log_b x, \sin x, \cos x$,

- $f(ax^2+bx+c)=A$, kde f je funkcia $x^a, b^x, \log_b x$,

- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I) rovníc zapísaných v tvare $f(x)g(x)=0$, pokiaľ vie riešiť rovnice $f(x)=0, g(x)=0$,
 - nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I) rovníc, ktorých tvar možno upraviť na niektorý z predchádzajúcich tvarov
 - použitím úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti funkcií (*pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie*),
 - pripočítaním (špeciálne odpočítaním) a vynásobením (špeciálne vydelením) oboch strán rovnice výrazom, umocnením (špeciálne odmocnením) oboch strán rovnice,
 - odstránením absolútnej hodnoty v prípade rovníc s jednou absolútnou hodnotou (*rozlišovaním dvoch vhodných prípadov*),
- pričom vie rozhodnúť
- či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej rovnice,
 - ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych koreňov zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú koreňmi pôvodnej rovnice,
- riešiť kontextové (*slovné*) úlohy vedúce k rovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania,

(*sústavy rovníc*)

- opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej a dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi (*pozri 3.2 Analytická geometria v rovine, 4.2 Súradnicová sústava v priestore*),
 - nájsť všetky riešenia sústavy 2 rovníc s 2 neznámymi, ktorú možno jednoducho upraviť na tvar $y=f(x) \wedge g(x,y)=0$ (resp. $x=f(y) \wedge g(x,y)=0$), pokiaľ vie riešiť rovnicu $g(x,f(x))=0$ (resp. $g(f(y),y)=0$),
 - upravovať sústavy rovníc použitím
 - úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti elementárnych funkcií (*pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie*),
 - pripočítania (špeciálne odpočítania) a vynásobenia (špeciálne vydelenia) oboch strán rovnice výrazom,
- pričom vie rozhodnúť,
- či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej sústavy,
 - ktoré z riešení sústavy, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj riešeniami pôvodnej sústavy, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych riešení zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú riešeniami pôvodnej sústavy,

(*nerovnice a ich sústavy*)

- nájsť množinu všetkých riešení nerovnice
 - $f(x)*L$, kde L je reálne číslo, $*$ je jeden zo znakov nerovnosti $<, \leq, \geq, >$, f je niektorá z funkcií $(ax+b)^a, b^x, \log_b x, |x-a|$, resp. množinu všetkých riešení tejto nerovnice ležiacich v danom intervale,
 - $f(x)*L$, kde f je niektorá z funkcií $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ a x je prvkom daného ohraničeného intervalu,
 - $\frac{f(x)}{g(x)}*0$ a $f(x)g(x)*0$, pokiaľ vie riešiť nerovnice $f(x)*0, g(x)*0$, kde $*$ je znak nerovnosti,
- nájsť všetky riešenia nerovníc, ktorých riešenie možno postupmi uvedenými v nasledujúcej odrážke

- nahradiť riešením nerovnic uvedených v predchádzajúcej odrážke,
- pri riešení a úpravách nerovnic správne použiť
 - vynásobenie obidvoch strán nerovnice kladným alebo záporným číslom,
 - pripočítanie výrazu k obidvom stranám nerovnice,
 - riešiť sústavu nerovnic s jednou neznámou v prípadoch, keď vie vyriešiť samostatne každú z daných nerovnic (*pozri prieniky a zjednotenia intervalov v 1.2 Čísla, premenné a výrazy*),
 - vyznačiť na x -ovej osi riešenie nerovnice $f(x) \cdot g(x)$, pokiaľ vie načrtnúť grafy funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$
 - v rovine opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej nerovnice s dvoma neznámymi x, y , ktorú možno zapísať v tvare
 - $y \cdot f(x)$ alebo $x \cdot f(y)$ (kde \cdot je znak nerovnosti) v tých prípadoch, kedy vie načrtnúť graf funkcie $y = f(x)$, resp. $x = f(y)$,
 - $ax + by + c \cdot 0$,
 - riešiť kontextové (*slovné*) úlohy vedúce k nerovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

2 FUNKCIE

2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Obsah

Pojmy:

premenná (veličina), “daná premenná je funkciou inej premennej”, funkcia, postupnosť, argument, funkčná hodnota, (n -tý) člen postupnosti, definičný obor a obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rastúca, klesajúca, monotónna funkcia (postupnosť), maximum (minimum) funkcie (postupnosti), lokálne maximum a minimum funkcie, zhora (zdola) ohraničená funkcia (postupnosť), ohraničená funkcia (postupnosť), horné (dolné) ohraničenie, konštantná, prostá, **párna a nepárna**, inverzná, zložená, periodická funkcia, rekurentný vzťah, postupnosť daná rekurentne.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rastúca (klesajúca) funkcia je prostá,
- k prostej funkcii existuje inverzná funkcia,
- graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný s grafom funkcie f podľa priamky $y = x$,
- $f(f^{-1}(x)) = x$,
- graf párnej funkcie f je súmerný podľa osi y ,
- graf nepárnej funkcie f je súmerný podľa bodu $[0, 0]$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či niektorá z dvoch daných premenných veličín je funkciou druhej z nich, a túto závislosť vyjadriť, ak je to možné urobiť pomocou predpisov funkcií, ktoré pozná,
- z daného grafu funkcie (**postupnosti**)
 - určiť približne
 - jej extrémny,
 - intervaly, na ktorých rastie (klesá),
 - zistiť, či je zdola (zhora) ohraničená, **párna, nepárna**,

- nájsť definičný obor danej funkcie, resp. rozhodnúť, či dané číslo patrí do definičného oboru danej funkcie (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- rozhodnúť, či dané číslo patrí do oboru hodnôt danej funkcie (*pozri 1.4 Rovnice a nerovnice*),
- nájsť funkčnú hodnotu funkcie v danom bode, určiť jej priesečníky so súradnicovými osami, nájsť priesečníky grafov dvoch funkcií (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- v prípade konštantnej funkcie a funkcií $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $\frac{ax + b}{cx + d}$, x^a , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$,

$\operatorname{tg} x$

- určiť na danom intervale ich obor hodnôt,
- určiť intervaly, na ktorých sú tieto funkcie rastúce, resp. klesajúce,
- načrtnúť ich grafy,
- nájsť ich najväčšie, resp. najmenšie hodnoty na danom intervale $\langle a, b \rangle$,
- rozhodnúť, ktoré z nich sú na danom intervale I
 - prosté,
 - zhora (zdola) ohraničené,
 - **párne, nepárne**,
- načrtnúť grafy funkcií
 - $|ax + b|$,
 - $a + f(x)$, $f(a + x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, **$a \cdot f(x)$** , ak pozná graf funkcie f a opísať, ako vznikne uvedený graf z grafu funkcie f ,
- načrtnúť graf inverznej funkcie f^{-1} , ak pozná graf prostej funkcie f ,
- nájsť inverzné funkcie k funkciám $ax + b$, $\frac{ax + b}{cx + d}$, x^a , a^x , $\log_a x$,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o existencii riešenia rovnice $f(x) = 0$ (resp. $f(x) = a$), pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie f ,
- graficky znázorniť na číselnej osi množinu riešení nerovnice $f(x) * a$, kde $*$ je jeden zo symbolov $<, \leq, \geq, >$, pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie f ,
- nájsť všetky riešenia nerovnice $f(x) * a$, pokiaľ vie riešiť rovnicu $f(x) = a$ a súčasne vie načrtnúť graf funkcie f ,
- vypočítať hodnotu daného člena postupnosti danej jednoduchým rekurentným vzťahom.

2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

Obsah

Pojmy:

lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť, smernica priamky, diferenciacia aritmetickej postupnosti, vrchol paraboly.

Vlastnosti a vzťahy:

- Grafom lineárnej (kvadratickej) funkcie je priamka (parabola),
- lineárna (kvadratická) funkcia je jednoznačne určená funkčnými hodnotami v 2 (3) bodoch,
- vzťah medzi koeficientom pri lineárnom člene a rastom, resp. klesaním lineárnej funkcie,
- vzťah medzi diferenciou aritmetickej postupnosti a jej rastom, resp. klesaním,
- kvadratická funkcia má na R jediný globálny extrém, minimum v prípade kladného koeficientu pri

kvadratickom člene, maximum v opačnom prípade,

- parabola (t.j. graf kvadratickej funkcie) je súmerná podľa rovnobežky s osou y , prechádzajúcej vrcholom paraboly.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

- riešiť lineárne a kvadratické rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy), špeciálne vie nájsť priesečníky grafov 2 lineárnych (resp. 2 kvadratických) funkcií alebo lineárnej a kvadratickej funkcie,
- nájsť predpis lineárnej (alebo konštantnej) funkcie, ak pozná
 - hodnoty v 2 bodoch,
 - hodnotu v 1 bode a smernicu grafu tejto funkcie,
- nájsť predpis kvadratickej funkcie, ak pozná
 - jej hodnoty v 3 vhodne zvolených bodoch,
 - vrchol jej grafu a hodnotu v ďalšom bode,
- nájsť intervaly, na ktorých je daná lineárna alebo kvadratická funkcia rastúca, resp. klesajúca,
- nájsť, pokiaľ existuje, najväčšiu a najmenšiu hodnotu kvadratickej a lineárnej funkcie na danom intervale, špeciálne vie nájsť vrchol grafu kvadratickej funkcie, ak pozná jej predpis,
- určiť hodnotu ľubovoľného člena aritmetickej postupnosti, ak pozná
 - jeden jej člen a diferenciu,
 - dva rôzne členy,
- pre aritmetickú postupnosť (danú explicitne) napísať zodpovedajúci rekurentný vzťah,
- nájsť súčet n (pre konkrétne n) za sebou nasledujúcich členov danej aritmetickej postupnosti.

2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

Obsah

Pojmy:

mocnina, mocnina s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom, n -tá odmocnina, polynóm, mnohočlen, mocninová funkcia, koeficient pri n -tej mocnine (v *polynomickej funkcii*), exponent, lineárna lomená funkcia, asymptoty grafu lineárnej lomenej funkcie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Polynóm stupňa n má najviac n rôznych reálnych koreňov,
- polynóm nepárneho stupňa má aspoň jeden reálny koreň,
- $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$, $(x^r)^s = x^{rs}$, $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$, $(xy)^r = x^r \cdot y^r$, $r, s \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0, m, n \in \mathbb{N}$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

- použiť rovnosti z časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť rovnice a nerovnice s polynomickými, mocninovými a lineárnymi lomenými funkciami (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- schematicky načrtnúť a porovnať grafy funkcií $y = x^n$ pre rôzne hodnoty $n \in \mathbb{Z}$ na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$,
- nájsť rovnice asymptot grafu lineárnej lomenej funkcie a načrtnúť graf tejto funkcie,
- nájsť intervaly, na ktorých je lineárna lomená funkcia rastúca, resp. klesajúca a nájsť k nej inverznú

funkciu.

2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Obsah

Pojmy:

exponenciálna a logaritmická funkcia, základ exponenciálnej a logaritmickej funkcie, logaritmus, dekadický logaritmus, číslo e a prirodzený logaritmus, geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, $(a^r)^s = a^{rs}$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $r, s \in \mathbb{R}$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\log_a r + \log_a s = \log_a rs$, $\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $r, s > 0$,
- $\log_a (r^s) = s \log_a r$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $r > 0$, $s \in \mathbb{R}$,
- $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

(exponenciálna funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť exponenciálne rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie a^x v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho “význačných” bodov (t.j. $[0, 1]$, $[1, a]$),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola funkcie a^x na danom intervale,
- vyjadriť n -tý člen geometrickej postupnosti (pre konkrétne n) pomocou jej prvého (alebo iného než n -tého) člena a kvocientu q ,
- nájsť súčet n za sebou nasledujúcich členov geometrickej postupnosti (pre konkrétne n),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní geometrickej postupnosti v závislosti od jej prvého člena a kvocientu,

(logaritmická funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť logaritmické rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie $\log_a x$ v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho “význačných” bodov (t.j. $[1, 0]$, $[a, 1]$),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola logaritmickej funkcie na danom intervale,
- vyriešiť jednoduché príklady na výpočet úrokov.

2.5 Goniometrické funkcie

Obsah

Pojmy:

π , goniometrická funkcia, sínus, kosínus, tangens, (najmenšia) perióda, jednotková kružnica, oblúčková miera, stupňová miera, uhol základnej veľkosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- Hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$,
- vzťahy pre sínus a kosínus dvojnásobného uhla:
 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$,
 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$,
 $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$,
- graf funkcie kosínus vznikne posunutím grafu funkcie sínus,
- periodickosť a najmenšie periódy jednotlivých goniometrických funkcií.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave goniometrických výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- nájsť pomocou kalkulačky riešenie rovnice $f(x) = a$, kde f je goniometrická funkcia, a to aj v prípade, že na kalkulačke niektoré goniometrické alebo inverzné goniometrické funkcie nie sú (pozri tiež 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť goniometrické rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- vyjadriť hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ako pomery strán pravouhlého trojuholníka,
- použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého trojuholníka (pozri tiež 3.1 Základné rovinné útvary),
- vyjadriť (na základe znalosti súmerností a periodickosti grafov goniometrických funkcií) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ pre $\alpha \in \mathbb{R}$ ako sínus, kosínus alebo tangens vhodného uhla $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
- nájsť hodnoty všetkých goniometrických funkcií pre daný argument, ak pre tento argument pozná hodnotu aspoň jednej z nich,
- načrtnúť grafy funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, určiť hodnoty v bodoch $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, určiť najmenšie periódy týchto grafov,
- určiť podintervaly daného ohraničeného intervalu, na ktorých sú funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ rastúce, resp. klesajúce,
- rozhodnúť o ohraničenosti funkcie $\operatorname{tg} x$ na danom intervale,
- načrtnúť grafy funkcií $k(f(x))$, $f(kx)$, $f(ax + b)$, $f(x) + a$, kde $k, a, b \in \mathbb{R}$ a f je niektorá z goniometrických funkcií, určiť priesečníky týchto funkcií s x -ovou osou a ich periódu a v prípade $f(x) = \sin x$ alebo $f(x) = \cos x$ aj najmenšie a najväčšie hodnoty.

3 PLANIMETRIA

3.1 Základné rovinné útvary

Obsah

*Pojmy:**a) Lineárne útvary*

bod, priamka, polpriamka, úsečka, stred úsečky, deliaci pomer, polrovina, rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol (ostrý, pravý, priamy, tupý), susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly, os úsečky, os uhla, uhol dvoch priamok, kolmé priamky, kolmica, vzdialenosť (dvoch bodov, bodu od priamky, rovnobežných priamok).

b) Kružnica a kruh

stred, polomer (ako číslo i ako úsečka), priemer, tetiva, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica a nesečnica, stredový a obvodový uhol, obvod kruhu a dĺžka kružnicového oblúka, kruhový výsek a odsek, medzikružie, obsah kruhu a kruhového výseku, spoločné (vonkajšie, vnútorné) dotyčnice dvoch kružníc.

c) Trojuholník

trojuholník (ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník), vrchol, strana (ako vzdialenosť, ako úsečka), výška (ako vzdialenosť, ako úsečka i ako priamka), uhol, ťažnica, ťažisko, stredná priečka, kružnica trojuholníku opísaná, kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a plošný obsah trojuholníka, trojuholníková nerovnosť, Pytagorova veta, Euklidove vety, sínusová a kosínusová veta.

d) Štvoruholníky a mnohoúhelníky

vrchol, strana (ako vzdialenosť, ako úsečka), uhlopriečka, uhol, konvexný štvoruholník, rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný lichobežník, základňa a rameno lichobežníka, výška rovnobežníka a lichobežníka, plošný obsah rovnobežníka a lichobežníka, konvexné, nekonvexné a pravidelné mnohoúhelníky, obsah mnohoúhelníka.

*Vlastnosti a vzťahy:**a) Lineárne útvary*

- Súhlasné uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- striedavé uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- súčet susedných uhlov je 180° ,
- vrcholové uhly sú rovnaké.

b) Trojuholník

- Trojuholníková nerovnosť,
- súčet vnútorných uhlov trojuholníka,
- oproti väčšej (menšej) strane leží väčší (menší) uhol, oproti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly,
- delenie ťažníc ťažiskom,
- priesečník osí strán je stred opísanej kružnice, priesečník osí uhlov je stred vpísanej kružnice,
- vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou
 - dĺžky strany a k nej príslušnej výšky,
 - dĺžky dvoch strán a sínusu uhla týmito stranami zovretého,
- Pytagorova veta, goniometria pravouhlého trojuholníka (pozri 2.5. Goniometrické funkcie),
- vyjadrenie kosínusov uhlov trojuholníka pomocou dĺžok strán (kosínusová veta),
- $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$, $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$, $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}$ (sínusová veta),
- zhodné a podobné trojuholníky, vety o zhodnosti (sss, sus, usu, Ssu) a podobnosti (sss, sus, uu) trojuholníkov, Euklidove vety,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch trojuholníkov a
 - dĺžkami odpovedajúcich si úsečiek,
 - veľkosťami odpovedajúcich si uhlov,
 - ich plošnými obsahmi.

c) Kružnica a kruh

- Kružnica je jednoznačne určená stredom a polomerom, resp. tromi svojimi bodmi,
- žiadne tri body kružnice neležia na priamke,
- kolmosť dotyčnice k príslušnému polomeru kružnice,

- Tálesova veta, vzťah medzi stredovým uhlom a obvodovými uhlami príslušnými k danej tetive,
- závislosť vzájomnej polohy kružnice a priamky na polomere kružnice a vzdialenosti jej stredu od priamky,
- dotykový bod dvoch kružníc leží na spojnici stredov kružníc, závislosť vzájomnej polohy dvoch kružníc od vzdialenosti stredov kružníc a ich polomerov,
- vzťahy pre výpočet obvodu a obsahu kruhu, dĺžky kružnicového oblúka a obsahu kruhového výseku.

d) Štvoruholníky a mnohoúhelníky

- Rovnobežnosť a rovnaká veľkosť protíahlých strán rovnobežníka,
- rozpoľovanie uhlopriečok v rovnobežníku,
- rovnosť protíahlých vnútorných uhlov v rovnobežníku,
- súčet susedných uhlov rovnobežníka,
- súčet vnútorných uhlov lichobežníka priľahlých k jeho ramenu,
- uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a rozpoľujú vnútorné uhly,
- zhodnosť uhlopriečok obdĺžnika a štvorca,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- pravidelnému n -uholníku sa dá vpísať a opísať kružnica,
- v rovnoramennom lichobežníku sú rovnaké uhlopriečky a rovnaké uhly pri základni,
- obsah rovnobežníka vyjadrený pomocou strany a príslušnej výšky, resp. pomocou susedných strán a uhla medzi nimi,
- obsah lichobežníka vyjadrený pomocou výšky a veľkosti základní.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- približne vypočítať obvod a obsah narysovaných trojuholníkov, n -uholníkov, kruhov a ich častí,
- vypočítať v trojuholníku, jednoznačne určenom jeho stranami, resp. stranami a uhlami, zvyšné strany a uhly, dĺžky ťažníc, výšok, obvod a obsah,
- rozhodnúť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné,
- vlastnosti zhodnosti a podobnosti použiť vo výpočtoch,
- vypočítať obvod a obsah kruhu a kruhového výseku,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
 - priamky a kružnice,
 - dvoch kružníc, ak pozná ich polomery a vzdialenosť stredov,
- vypočítať plošný obsah rovnobežníka, lichobežníka, resp. rozkladom na trojuholníky aj obsah iných mnohoúhelníkov,
- vypočítať uhol medzi uhlopriečkami, resp. medzi uhlopriečkou a stranou, v pravidelnom mnohoúhelníku.

3.2 Analytická geometria v rovine

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) súradnicová sústava na priamke (číselná os) a v rovine, súradnice bodu, všeobecná rovnica priamky, smernica priamky, smernicový tvar rovnice priamky, rovnica kružnice, vektor, umiestnenie vektora, súradnice vektora, vektor opačný k danému vektoru, nulový vektor, súčet a rozdiel dvoch vektorov, násobok vektora číslom, dĺžka vektora, skalárny súčin vektorov, parametrické rovnice priamky, smerový a normálový vektor priamky.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi smernicami dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- aspoň jeden vzťah alebo postup pre výpočet
 - uhla dvoch priamok (*napr. pomocou skalárneho súčinu, kosínusovej vety alebo smerníc*),
 - vzdialenosti bodu od priamky,
- geometrická interpretácia súčtu dvoch vektorov a násobku vektora reálnym číslom a ich vyjadrenie pomocou súradníc daných vektorov,
- body A , B a C ležia na jednej priamke, ak jeden z vektorov $B - A$ a $C - A$ je násobkom druhého,
- vzťah medzi smerovými vektormi dvoch rovnobežných priamok,
- vzdialenosť dvoch bodov ako dĺžka vektora,
- kolmosť dvoch priamok a jej vzťah so skalárnym súčinom ich smerových vektorov,
- vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou dĺžok vektorov a kosínusu ich uhla (resp. vyjadrenie kosínusu uhla dvoch vektorov pomocou ich skalárneho súčinu a ich dĺžok), vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecnej rovnice priamky a normálovým vektorom priamky.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov,
- vypočítať súradnice stredu úsečky, resp. bodu, ktorý úsečku rozdeľuje v danom pomere,
- napísať analytické vyjadrenie priamky
 - prechádzajúcej dvoma danými bodmi,
 - daným bodom rovnobežne s danou priamkou,
 - prechádzajúcej daným bodom kolmo na danú priamku,
- určiť vzájomnú polohu dvoch priamok (ak sú dané ich rovnice) a nájsť súradnice ich prípadného priesečníka,
- vypočítať
 - vzdialenosť dvoch bodov,
 - vzdialenosť bodu od priamky,
 - vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
 - obsah trojuholníka určeného jeho vrcholmi,
 - uhol dvoch priamok,
- napísať rovnicu kružnice
 - ak pozná jej stred a polomer,
 - v tvare $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, ak pozná tri body, ktorými kružnica prechádza,
- určiť z rovnice kružnice jej stred a polomer,
- opísať v súradnicovej sústave pomocou rovníc a nerovníc úsečku, kružnicu, polovinu a kruh,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
 - priamky a kružnice,
 - dvoch kružníc,
 ak pozná ich rovnice,
- pri riešení planimetrických úloh používať analytickú metódu, t.j. vie
 - vhodne si zvoliť súradnicovú sústavu a algebraicky spracovať zadanie,
 - pomocou vedomostí z algebry a poznatkov o vektoroch algebraicky vyriešiť úlohu,
 - algebraický výsledok „preložiť“ do geometrického kontextu úlohy.

3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- geometricky opísať, načrtnúť a nájsť (v danej alebo vhodne zvolenej súradnicovej sústave) analytické vyjadrenie množiny bodov s konštantnou vzdialenosťou od
 - bodu,
 - priamky,
 - kružnice,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov,
 - z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom,
 - ktoré majú rovnakú vzdialenosť od
 - dvoch bodov,
 - dvoch rovnobežných priamok,
 - dvoch rôznobežných priamok,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov, ktoré majú
 - od daného bodu vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
 - od danej priamky vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
 - od jedného bodu väčšiu vzdialenosť ako od druhého bodu,
 - od jednej danej priamky väčšiu vzdialenosť ako od druhej danej priamky,
- znázorniť množinu bodov $[x, y]$, pre ktoré platí
 - $y * f(x)$, kde $*$ je jeden zo znakov $<, \leq, \geq, >$ a f je predpis funkcie, ktorej graf vie žiak znázorniť (pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti),
 - $ax + by + c * 0$,
 a v jednoduchých prípadoch aj množinu bodov $[x, y]$, ktorá je opísaná sústavou dvoch z predchádzajúcich nerovnic (pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- tieto množiny bodov použiť pri riešení jednoduchých konštrukčných úloh (pozri 3.5 Konštrukčné úlohy).

3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

Obsah

Pojmy:

zhodné zobrazenie, osová súmernosť, os súmernosti, posunutie, stredová súmernosť, stred súmernosti, otočenie, stred otočenia, orientovaný uhol a jeho veľkosti, uhol otočenia, osovo a stredovo súmerný útvar; podobné zobrazenie, pomer podobnosti, rovnol'ahlosť, stred a koeficient rovnol'ahlosti, samodružný bod.

Vlastnosti a vzťahy:

- Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- otočenie je jednoznačne určené stredom a uhlom otáčania,
- posunutie je jednoznačne určené vektorom posunutia, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- vzťah medzi orientovaným uhlom a jeho veľkosťami,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- nech A, B sú dva osovo súmerné body podľa priamky p , potom AB je kolmá na p a stred AB leží na p ,

- priamka a jej obraz v posunutí sú rovnobežné,
- rovnol'ahlosť je jednoznačne určená stredom a koeficientom rovnol'ahlosti, dvoma vhodne zvolenými dvojicami odpovedajúcich si bodov,
- dve rovnol'ahlé priamky sú rovnobežné,
- každé dve nerovnaké rovnobežné úsečky sú rovnol'ahlé (dvoma spôsobmi),
- každé dve kružnice s rôznym polomerom sú si podobné (sú rovnol'ahlé),
- vonkajšie (vnútorné) spoločné dotyčnice dvoch kružníc sa pretínajú v strede rovnol'ahlosti,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch útvarov a
 - dĺžkami zodpovedajúcich si úsečiek,
 - veľkosťami zodpovedajúcich si uhlov,
 - ich plošnými obsahmi.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zobrazit' daný bod (útvár, graf) v danom zhodnom alebo podobnom zobrazení,
- rozhodnúť, či je daný útvar osovito (stredovo) súmerný,
- napísať súradnice bodu (rovnicu priamky, úsečky, kružnice), ktorý je obrazom daného bodu (danej priamky, úsečky, kružnice)
 - v súmernosti podľa začiatku súradnej sústavy,
 - v súmernosti podľa niektorej súradnej osi alebo podľa priamky $y = x$,
 - v posunutí,
- zostrojiť
 - stredy rovnol'ahlosti dvoch daných kružníc,
 - obraz daného útvaru v danom zhodnom zobrazení alebo rovnol'ahlosti, resp. útvar podobný s daným útvarom, pri danom pomere podobnosti.

3.5 Konštrukčné úlohy

Obsah

Pojmy:

rozbor, náčrt, konštrukcia, postup konštrukcie.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zdôvodniť postup konštrukcie, t. j. urobiť rozbor jednoduchých konštrukčných úloh, pričom vie použiť
 - nasledujúce základné konštrukcie (na ktoré sa môže pri opise postupu zložitejších konštrukčných úloh odvolávať bez toho, aby ich podrobne rozpisoval):
 - rovnobežku s danou priamkou daným bodom,
 - rovnobežku s danou priamkou v predpísanej vzdialenosti,
 - os úsečky, os uhla,
 - priamku, ktorá prechádza daným bodom a zvierá s danou priamkou daný uhol,
 - úsečku dĺžky $\frac{ab}{c}$ (pomocou podobnosti), kde a , b , c sú dĺžky narysovaných úsečiek,
 - rozdeliť úsečku v danom pomere,
 - trojuholník určený:
 - tromi stranami,
 - dvoma stranami a uhlom,

- dvoma uhlami a stranou,
 - kružnicu
 - trojuholníku opísanú,
 - do trojuholníka vpísanú,
 - dotyčnicu kružnice
 - v danom bode kružnice,
 - z daného bodu ležiaceho mimo kružnice,
 - rovnobežnú s danou priamkou,
 - stredy rovnôľahlosti dvoch kružníc a spoločné dotyčnice dvoch kružníc,
 - obraz daného bodu, úsečky, priamky, kružnice v danom zhodnom zobrazení, resp. v rovnôľahlosti (pozri 3. 4 Zhodné a podobné zobrazenia),
 - množiny bodov daných vlastností, uvedené v prvej a druhej odrážke v 3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie,
 - množiny bodov daných vlastností,
- pri kreslení náčrtu pri rozbere úlohy rozlíšiť jednotlivé možnosti zadania (napr. “výška leží v trojuholníku” a “výška je mimo trojuholníka”),
 - na základe vykonaného (daného) rozboru napísať postup konštrukcie,
 - uskutočniť konštrukciu danú opisom,
 - určiť počet riešení v prípade číselne zadaných úloh.

4 STEREOMETRIA

4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

Obsah

Pojmy:

premietanie (voľné rovnobežné premietanie), priemet bodu, priestorového útvaru do roviny.

Vlastnosti a vzťahy:

- Voľné rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer a rovnobežnosť.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- použiť vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazovaní kocky, pravidelných hranolov.

4.2 Súradnicová sústava v priestore

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) sústava súradníc v priestore, bod a jeho súradnice, vzdialenosť bodov.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov,

- určiť súradnice stredu úsečky,
- špeciálne vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave opísať vrcholy daného kvádra.

4.3 Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy

Obsah

Pojmy:

bod, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežnosť a rôznobežnosť priamky a roviny, rovnobežné a rôznobežné roviny, priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rovnobežné (rôznobežné) priamky ležia v jednej rovine, mimobežné priamky neležia v jednej rovine,
- priesečnice roviny s dvoma rovnobežnými rovinami sú rovnobežné.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- opísať možnosti pre vzájomné polohy ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- zostrojiť vo voľnom rovnobežnom priemete jednoduchého telesa (kocky, resp. hranola) priesečník priamky (určenej dvoma bodmi ležiacimi v rovinách stien kocky, resp. hranola) s rovinou steny daného telesa,
- zostrojiť rovinný rez kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa.

4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

Obsah

Pojmy:

uhol dvoch priamok, kolmosť priamok a rovín, priamka kolmá k rovine, uhol dvoch rovín, kolmý priemet bodu a priamky do roviny, vzdialenosť dvoch lineárnych útvarov (dvoch bodov, bodu od roviny, bodu od priamky, vzdialenosť rovnobežných priamok, priamky a roviny s ňou rovnobežnej, vzdialenosť rovnobežných rovín), uhol priamky s rovinou.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- na zobrazených telesách označiť
 - úsečky, ktorých skutočná veľkosť predstavuje vzdialenosť daných lineárnych útvarov,
 - uhly, ktorých skutočná veľkosť predstavuje uhol daných lineárnych útvarov.

4.5 Telesá

Obsah

Pojmy:

teleso, mnohosten, vrchol, hrana, stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder,

rovnobežnost, ihlan, štvorsten, pravidelný štvorsten, podstava, výšky v štvorstene, guľa, valec, kužeľ, objemy a povrchy telies.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťahy pre výpočty objemov a povrchov telies.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra, pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pri tom nájsť a aktívne použiť vzťahy pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy.

5 KOMBINATORIKA, PRAVDEPODOBNOŠŤ A ŠTATISTIKA

5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Obsah

Pojmy:

(kombinatorické) pravidlo súčtu, (kombinatorické) pravidlo súčinu, permutácie a **permutácie s opakovaním**, variácie a variácie s opakovaním, kombinácie, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník, pravdepodobnosť, doplnková pravdepodobnosť, „geometrická“ pravdepodobnosť, náhodný jav, nezávislé javy.

Vlastnosti a vzťahy:

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, $P_n = n!$, $V_k^i = n^k$, $P_{n_1, n_2, \dots, n_k}^i = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
- pre pravdepodobnosť P udalosti A platí $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A) + P(A') = 1$, kde A' je doplnková udalosť k udalosti A ,
- pravdepodobnosť istej udalosti je 1,
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ak A, B sú nezávislé javy,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- riešiť jednoduché kombinatorické úlohy
 - vypisovaním všetkých možností, pričom
 - vie vytvoriť systém (strom logických možností) na vypisovanie všetkých možností (ak sa v tomto strome vyskytujú niektoré možnosti viackrát, vie určiť násobnosť ich výskytu),
 - dokáže objaviť podstatu daného systému a pokračovať vo vypisovaní všetkých možností,
 - na základe vytvoreného systému vypisovania všetkých možností určiť (pri väčšom počte

- možností algebraickým spracovaním) počet všetkých možností,
- použitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu,
 - využitím vzťahov pre počet kombinácií, variácií, variácií s opakovaním, permutácií a permutácií s opakovaním,
 - použiť pri úprave výrazov rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* (pozri 1.4 Čísla, premenné, výrazy),
 - rozhodnúť
 - o závislosti javov A , B , ak pozná $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$,
 - v jednoduchých prípadoch o správnosti použitia rovnosti $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
 - riešiť úlohy na pravdepodobnosť, založené na
 - hľadani pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností, resp. všetkých nepriaznivých a všetkých priaznivých možností, ak vie tieto počty určiť riešením jednoduchých kombinatorických úloh,
 - doplnkovej pravdepodobnosti,
 - využiti „geometrickej“ pravdepodobnosti.

5.2 Štatistika

Obsah

Pojmy:

diagram – graf (stĺpcový, obrázkový, kruhový, lomený, spojitý, histogram), základný súbor, výberový súbor, rozdelenie, modus, medián, aritmetický priemer (aj viac ako dvoch čísel), stredná hodnota, smerodajná odchýlka, rozptyl, triedenie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťah pre výpočet rozptylu.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- vypočítať aritmetický priemer daných čísel,
- získavať informácie z rôznych tabuliek (napr. autobusová tabuľka) a diagramov,
- spracovať údaje do vhodných diagramov,
- zistiť v danom súbore modus, medián, strednú hodnotu, priemer,
- pomocou vhodného softvéru zistiť v danom súbore rozptyl, smerodajnú odchýlku a uviesť štatistickú interpretáciu získaných výsledkov,
- uviesť príklad súboru s požadovanými podmienkami na modus, medián, strednú hodnotu, priemer, rozptyl, smerodajnú odchýlku,
- znázorniť a vyhodnotiť namerané hodnoty,
- urobiť triedenie a znázorniť ho.

ÚPRAVY CIEĽOVÝCH POŽIADAVIEK Z MATEMATIKY PRE ŽIAKOV SO ZDRAVOTNÝM ZNEVÝHODNENÍM

Žiaci so sluchovým postihnutím

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci so zrakovým postihnutím

Úlohy, ktoré vyžadujú vizuálnu skúsenosť sa upravujú, nahrádzajú slovným opisom alebo vypúšťajú.

Žiaci s telesným postihnutím

Konštrukčné úlohy sa nahrádzajú slovným opisom jednotlivých krokov konštrukcie (podľa druhu a stupňa telesného postihnutia).

Žiaci s vývinovými poruchami učenia alebo správania

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiakom s vývinovou poruchou učenia – dyskalkúlia – neodporúčame konať maturitnú skúšku z matematiky.

Žiaci s narušenou komunikačnou schopnosťou

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci chorí a zdravotne oslabení

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci s pervazívnymi vývinovými poruchami (s autizmom)

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.