Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika

ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV
NATIONAL INSTITUTE FOR EDUCATION

Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika

Matematika pre učiteľov informatiky 1

Predmet: Matematika pre učiteľov informatiky

Línia: Vlastný odborový kontext informatiky a informatickej výchovy

Operačný program VZDELÁVANIE

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond

Európska únia
Európsky sociálny fond

Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov ES

Matematika pre učiteľov informatiky 1

Identifikácia modulu

Aktivita projektu:	1.2 Vzdelávanie nekvalifikovaných učiteľov učiteľov informatiky na 2. stupni ZŠ a na SŠ
Línia aktivity:	Vlastný odborový kontext informatiky a informatickej výchovy
Predmet:	Matematika pre učiteľov informatiky

Zaradenie modulu

Modul *Matematika pre informatikov 1* slúži ako prerekvizita všetkým informatickým a programátorským modulom, kde sa používa matematika. V tomto semestri sú to najmä moduly programovania a digitálnej gramotnosti. Ďalej modul slúži ako prerekvizita modulom *Matematika pre informatikov 2* a *Matematika pre informatikov 3*.

Abstrakt modulu

Modul *Matematika pre informatikov 1* je rozčlenený na niekoľko tematických častí, ktoré zahŕňajú témy *čísla a číselné sústavy*, *prácu s matematickými výrazmi*, *súradnicovú sústavu*, *elementárnu geometriu* a *funkcie*. Tieto texty sú názornou ukážkou toho, že niet kráľovskej cesty k matematike. Tiež sú potvrdením skutočnosti, že matematika nie je len jedna. V textoch sú prezentované odlišné prístupy k obsahu a forme učenia matematiky na vysokej škole. Od názoru, že vysoká škola má pripraviť učiteľa v tom, čo bude používať a dať mu do rúk priamo úlohy, ktoré použije na hodinách, až po názor, že matematická príprava informatika zahŕňa vybudovanie abstraktných štruktúr, ktoré umožnia poslucháčovi získať potrebný nadhľad nad matematikou, aby ju potom mohol použiť vo svojej vednej disciplíne. Zanedbateľný nie je ani názor, že matematika je určitý druh umenia a jej krásu možno pochopiť iba vlastným objavovaním.

Autori do určitej miery súhlasia s každým z uvedených prístupov, no pri príprave jednotlivých tém sa riadili svojimi skúsenosťami s učením matematiky a na mieste poslucháčov si predstavovali svojich študentov. Veríme, že široká škála názorov na obsah aj metódy vyučovania matematiky je aj medzi lektormi tohoto študijného programu. Práve preto, aby si v materiáloch každý z lektorov aj poslucháčov našiel taký spôsob prezentovania matematiky, ktorý je mu najbližší, uviedli sme v tomto učebnom texte širokú paletu metód učenia a rôzne úrovne matematického obsahu. Dôležitá je podľa autorov osobná skúsenosť poslucháčov s riešením problémov, ktoré nepozostávajú iba z pochopenia pojmu, predvedenia algoritmu, alebo z dosadenia do vzorca.

Garant predmetu:

RNDr. Katarína Bachratá, PhD., ŽU, Žilina
katarina.bachrata@fri.uniza.sk

Autori textu:

RNDr. Katarína Bachratá, PhD., ŽU Žilina
RNDr. Hynek Bachratý, PhD., ŽU Žilina
Mgr. Oľga Czimmermannová, ŽU Žilina
Mgr. Peter Cimmermann, PhD., ŽU Žilina
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., UPJŠ Košice
Mgr. Peter Novotný, PhD., UK Bratislava
Mgr. Júlia Šišková, UK Bratislava
RNDr. Michal Winczer, PhD., UK Bratislava

Rukopis odovzdaný:

25. mája 2009

Úvod

Milí učitelia informatiky!

Napriek tomu, že cieľom Vášho štúdia v tomto projekte je zvýšenie Vašich kompetencií v predmete Informatika, bude Vaše štúdium obsahovať aj 3 moduly venované matematike. Autori tohto textu by boli veľmi radi, keby ste tento predmet nechápali ako odbočenie od Vášho cieľa naučiť sa pekné a užitočné veci z informatiky. Skúsme si predstaviť drevorubača, ktorý sa tak ponáhľa so svojou prácou, že nemá čas si nabrúsiť sekeru. Keby venoval pár minút vylepšeniu nástroja, mohol by pracovať efektívnejšie a s menšou námahou.

Matematiku je možné, podľa úrovne na akej sa používa, chápať ako zbierku vzorcov, pomocou ktorých sa riešia úlohy, ako zaujímavú a peknú teóriu, ktorej myšlienky sa dajú ukázať aj na elementárnej úrovni, ale aj ako vysoko abstraktnú teoretickú disciplínu, ktorá svojimi metódami a precíznymi postupmi zastrešuje každú vedeckú disciplínu. Naším cieľom nie je vychovávať z Vás matematikov, ale poskytnúť užitočné nástroje pre vednú disciplínu informatika. Nástrojmi nie sú myslené iba vzorce, ale hlavne spôsob myslenia a metódy riešenia problémov. Na úlohách na úrovni základoškolskej a stredoškolskej matematiky predvedieme „matematický spôsob“ riešenia problémov. Nechceme učiť postupy a metódy na náročných úlohách, pre ktorých pochopenie potrebujete nový matematický aparát. Myslieť a brúsiť nástroje sa dá aj na úlohách, nad ktorými máte nadhľad, alebo ich budete môcť priamo využiť v školskej praxi na hodinách informatiky alebo matematiky.

Témy, ktoré zahŕňajú úlohy tohto modulu, sa priamo využijú v ostatných moduloch v prvom semestri. Témy tohto prvého matematického modulu sú čísla a číselné sústavy, práca s matematickými výrazmi, súradnicová sústava a elementárna geometria, funkcie. Rozsah každej témy je dostatočne široký na to, aby ste si v materiáloch našli také úlohy, ktoré budú pre Vás výzvou, zaujmú Vás a ktorých riešením sa zlepší Váš vzťah k matematike ako spôsobu rozmýšľania. Výsledkom absolvovania modulu nemá byť znalosť vzorcov a algoritmov riešenia, ale schopnosť zamyslieť sa nad úlohou, navrhnúť nejaké postupy riešenia a spomedzi možných riešení vybrať to správne. Netreba poznať naspamäť vzorce, stačí vedieť, ako si nájsť potrebný vzorec a správne ho použiť, alebo koho sa na riešenie opýtať. A neprijať riešenie preto, že ho povedala nejaká autorita, ale preto, že rozumieme tomu, že je správne.

Prajeme Vám pekné čítanie.

Autori

Obsah

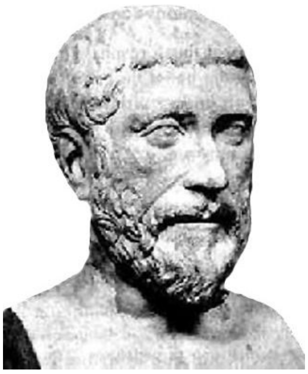
1. Čísla a číselné sústavy 4
1.1. Krátka exkurzia do histórie 4
1.2. Rôzne zápisy čísiel 4
1.3. Pozičné sústavy 5
1.4. Operácie v desiatkovej sústave 6
1.5. Dvojková pozičná sústava 8
1.6. Prevod medzi číselnými sústavami 8
1.7. Niektoré ďalšie pozičné sústavy 9
1.8. S akými číslami dokáže počítač pracovať 9
1.9. Príklady 10
2. Práca s matematickými výrazmi 12
2.1. Operácie s číslami a symbolmi, poradie vykonávania operácií 12
2.2. Sčitovanie a násobenie komutatívnosť, asociatívnosť, distributívnosť 12
2.3. Úprava lomených výrazov (práca so zlomkami) 13
2.4. Práca s mocninami a odmocninami 14
2.5. Vyhodnocovanie výrazov a ich vizualizácia v tvare koreňového stromu 15
2.6. Hľadanie pokladu, súťaž skupín v riešení úloh 16
2.7. Úlohy pre hľadanie pokladu 16
3. O nekonečnom ovocnom sade 19
3.1. Keď si matematik kúpi záhradu... 19
3.2. Veľké kreslenie 19
3.3. Čo vidíme na obrázku 21
3.4. A kde zostali čísla? 21
3.5. Zrátajme, čo sme videli 25
3.6. Čo je ako ďaleko, alebo návšteva pána Pytagora 26
3.7. Namiesto záveru... 28
4. Geometria 29
4.1. Základné úlohy 29
4.2. Náročnejšie úlohy 32
4.3. Prehľad používaných vzorcov 34
5. Funkcie 37

1. Čísla a číselné sústavy

Ako sa robí $+$, $-$, $\cdot$ a / si pamätá každý. Kto vie aj odmocňovať?

Čísla tvoria súčasť nášho každodenného života. Možno sa nad ich používaním ani nezamýšľame a používame ich celkom automaticky. Bolo to tak vždy? Vieme ešte „ručne“ vykonávať základné aritmetické operácie? Ktoré? A ako to robí počítač? Ako si dokáže zapamätať číslo, spočítať čísla v tabuľke? Odpovede na takéto otázky naznačíme v nasledujúcom texte. S históriou vzniku a používania čísiel sa môžeme podrobnejšie zoznámiť v [1], [2], [3].

1.1. Krátka exkurzia do histórie



Pytagoras, okolo 569-475 p. n. l.

Kedy ľudia začali používať čísla na označenie počtu nejakých predmetov, presne nevieme. Pravdepodobne to bolo niekedy počas prvej technickej revolúcie, približne pred 12 000 rokmi. Antropológovia sa ešte aj dnes stretávajú s prírodnými kmeňmi, ktoré používajú len označenia pre jedna a dva, prípadne tri. Môžeme predpokladať, že asi takto nejako to kedysi s číslami začalo. K dnešnej predstave a chápaniu čísiel viedla dlhá cesta.

Najstaršie sú asi prirodzené čísla, ktoré bežne používame na označenie počtu objektov – jeden, dva, tri, atď. – alebo na určenie ich poradia – prvý, druhý, tretí, atď. Často potrebujeme rozdeliť nejaký objekt na viac častí, napríklad jablko na polovice, koláč na tretiny, kilogram na gramy a pod. Prichádzame ku konceptu racionálneho čísla, zlomku a/b. S podobnými činnosťami, aké sme spomenuli, sa ľudia stretávali asi od nepamäti. Ale až v antickom Grécku prišli pytagorovci na to, že racionálne čísla nestačia na označenie všetkých čísiel. Ako prišli na to, že existujú aj iné čísla? Jednoducho, chceli odmerať dĺžku uhlopriečky štvorca so stranami dĺžky 1. Ako vieme (podľa Pytagorovej vety), dĺžka uhlopriečky je $\sqrt{2}$, a toto číslo sa nedá zapísať v tvare zlomku, hovoríme, že je iracionálne.

„Celé čísla sú od Boha, všetky ostatné sú dielom ľudí.“, Leopold Kronecker, 1823-1891

Vybudovať záporné čísla trvalo ľuďom 1500 rokov [1]. U Grékov sa čísla spájali jednak s geometrickou predstavou, a úsečky záporných dĺžok predsa nie sú. Iné použitie čísiel bolo riešenie aritmetických úloh, kde sa vyskytovali tzv. pridané a odobrané čísla. Záporné riešenia rovníc pre Grékov neexistovali. Asi najrealistickejšia motivácia na zavedenie záporných čísiel prichádzala z účtovníckej oblasti, na evidenciu dlhov. Tento prístup sa prejavil až v Indii približne v 7. storočí. A moderný prístup k záporným číslam, aký poznáme dnes, sa ustálil až o ďalších 1000 rokov!

Richard Dedekind (1831-1916) reálne čísla označil $\mathfrak{R}$ v *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). Giuseppe Peano (1858-1932) použil pre prirodzené čísla $\mathbb{N}$ (numerus integer positivus) v *Arithmetices prinicipia, nova methodo exposita*, 1889. $\mathbb{Q}$ (Quotient) pre racionálne a $\mathbb{Z}$ (Zahlen) pre celé použil Nicolas Bourbaki. (Pod menom N. Bourbaki sa (od roku 1935) skrývala skupina zväčša francúzskych matematikov.)

Reálne čísla predstavujú akési zovšeobecnenie čísla ako pojmu. V dnešnej dobe sa na označenie prirodzených čísiel používa $\mathbb{N}$, na označenie celých čísiel $\mathbb{Z}$, racionálnych čísiel $\mathbb{Q}$ a reálnych čísiel $\mathbb{R}$. V matematickej praxi sa s nimi stretávame prostredníctvom dvoch modelov [1]: aritmetického (čísla) a geometrického (číselná os). Názornejší je geometrický, v ktorom vidno vlastnosti reálnych čísiel (napríklad: pre ľubovoľné dva body X a Y platí práve jeden z prípadov: $X = Y$, X je vľavo od Y, Y je vľavo od X; medzi každými dvoma bodmi existuje bod; na priamke nie sú diery). V aritmetickom modeli zase lepšie vidno rozdiel medzi racionálnymi a iracionálnymi číslami.

1.2. Rôzne zápisy čísiel

Je zrejmé, že keď ľudia začali používať čísla, chceli ich aj uchovávať. Vznikla potreba ich nejako zapísať. V období, keď písať vedel len veľmi obmedzený počet ľudí, bol pomerne rozšírený spôsob komunikácie čísiel a aj výpočtov pomocou prstov na rukách. Používali ho na mnohých miestach a v Európe sa udržal do stredoveku. Ale zapísané čísla majú predsa len dlhšiu trvácnosť než čísla ukázané alebo vyslovené. Vyskytujú sa uzlíky (napr. v Číne a Inkovia v Peru), čiarky na rôznych listoch, zárezy v dreve a kameni. Asi najznámejšie je tzv. rováš – kúsok dreva, ktorý sa po vytvorení zárezov rozštiepil na dva kusy a tie oddelene slúžili ako doklady pre zmluvné strany.

Od 12. storočia až do r. 1826 sa rováše používali v britskom oficiálnom účtovníctve

Pri zápise čísiel sa veľmi často používalo rozdelenie čísla do vhodných skupín, ktoré sa potom zapísali pomocou dohodnutých symbolov. Asi najjednoduchší spôsob je, keď číslo rozdelíme na príslušný počet jednotiek a namiesto každej jednotky napíšeme čiarku. Napríklad

$$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = |||||||.$$

Takmer vždy boli skupiny nejaký násobok čísla 5, čo je počet prstov, ktoré sa pri počítaní zrejme dosť využívali. Používali sa skupiny veľkosti 5, 10, 20, a aj 60. Rímske čísla využívajúce skupiny po 10 sa používali v Európe 1500 rokov.

Vypočítajte ||||||||||||| · ||||||||||||.

$$\mathrm{I} = 1 \quad \mathrm{V} = 5 \quad \mathrm{X} = 10 \quad \mathrm{L} = 50 \quad \mathrm{C} = 100 \quad \mathrm{D} = 500 \quad \mathrm{M} = 1000$$

Napríklad $2009 = \mathrm{MMIX}$.

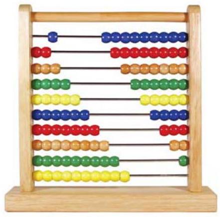
Pri vypracovávaní vľavo uvedeného cvičenia si istotne všimnete, že počítať s číslami zapísanými rímskymi číslami vyžadovalo riadny kus námahy. Čísla ste najprv rozložili na ich časti označené rovnakými symbolmi, potom sa snažili vykonať danú počtovú operáciu. Pri sčítaní a odčítaní to bolo ľahšie, stačilo ku skupinám rovnakých symbolov prvého čísla pridať alebo odobrať rovnaké symboly z druhého čísla. Ak sa už nedalo odobrať, bolo si treba rozmeniť na príslušný počet symbolov jeden najbližší väčší symbol. A na koniec použiť podľa potreby opačné pravidlo, t. j. zameniť príslušný počet symbolov na najbližší väčší symbol, a prípadne ešte pravidlo „odčítania“, napríklad $\mathrm{XXXX} = \mathrm{XL}, \mathrm{VIIII} = \mathrm{IX}$ a pod. Na uľahčenie výpočtov sa používalo počítadlo, čo je asi najstaršie zariadenie na spracovanie informácií.

Vypočítajte bez toho, aby ste si čísla prepísali „naším“ spôsobom.

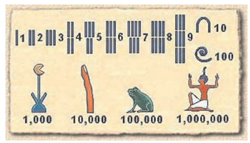
a) $\mathrm{MMIX} - \mathrm{CX}$,

b) $\mathrm{MDCCLIX} + \mathrm{IDX}$,

c) $\mathrm{MMIX} \cdot \mathrm{MMX}$.



Moderné počítadlo. Skúste vymyslieť, ako by ste na ňom počítali s rímskymi číslami.



Na rovnakom princípe ako rímske čísla bolo založené zapisovanie čísiel v starovekom Egypte, Grécku aj v Číne. Pravdaže používali rôzne symboly a rôzne hodnoty symbolov, napríklad v Číne až po $100\,000\,000$.

1.3. Pozičné sústavy

Pravdepodobne potreba pracovať s veľkými číslami a nepraktickosť veľkého počtu symbolov na označenie prvkov jednotlivých skupín viedli k systematickému využitiu pozície, na ktorej sa niektorý symbol nachádzal. Takýto spôsob vyjadrovania čísiel na nazýva pozičný. Je zaujímavé, že k takémuto objavu prišlo nezávisle vo viacerých civilizáciách, najznámejšie sú babylonský a mayský systém. Tieto systémy neboli takým pozičným zápisom, aký poznáme dnes, ale svojou podstatou sa od neho principiálne nelíšili. Dôležitým problémom v pozičnom zápise je potreba používania symbolu pre nulu, jeho zavedenie je podstatným prínosom. Výhody pozičného systému denne využívame, ľahko sa číta, je kompaktný, umožňuje zápis ľubovoľne veľkých čísiel, a navyše sa v ňom aj ľahko dá počítať.

si však uvedomuje, že čísla zapisujeme v nejakej číselnej sústave. Číslo berieme ako počet a zapisujeme ho tak, ako nás naučili. Pozrime sa bližšie na zápis čísla v desiatkovej sústave.

V Babylonskej ríši používali ako základ pozičnej sústavy 60. Pre „cifry“ nemali 60 symbolov, ale zapisovali ich (rovnako ako rímske čísla) tak, že číslo vytvorili zoskupením príslušného počtu symbolov napríklad pre desiatku a jednotku. Hodnota cifry sa ešte vynásobila 60 toľkokrát, na koľkej pozícii sa cifra nachádzala.

$$\begin{array}{cccc} 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{7} \\ \hline \end{array}$$

$$= 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$= 3000 + 200 + 40 + 7 = 3247$$

Táto sústava je pozičnou sústavou, lebo výsledné číslo závisí od pozície cifier: ak by sme prehodili napríklad prvú a tretiu cifru, získali by sme číslo $4\,237$, čo už by bolo iné číslo ako $3\,247$. Naše cifry sa zvyknú nazývať indo-arabské, pretože historické dôkazy naznačujú, že pochádzajú z Indie, odkiaľ sa do Európy dostali prostredníctvom Arabov. Kľúčový význam pri rozšírení tohoto zápisu a spôsobu počítania v rámci arabského sveta a neskôr aj Európy malo dielo Mohamada ibn Musa al-Khowarizmiho s

Ahá, no predsa algebra.

Sú to riadne „stariny“: *Al-Jabr* je z 9. storočia a *Liber abaci* z r. 1202.

názvom *Al-Jabr wal Muqabalah*, ktorého meno v latinskom preklade skomolili na „algorismi“, z čoho vzniklo slovo algoritmus na označenie návodu na počítanie. Ďalším zásadným dielom bola kniha *Liber abaci* od Leonarda Fibonacciho alebo aj Pisanského. Je pozoruhodné, že obaja autori majú svoje miesto i v dnešnej informatike.

V literatúre môžeme vidieť aj iné názvy n-árnych pozičných sústav, ktoré pochádzajú z latinčiny:

- dvojková – binárna
- desiatková – dekadická

a gréčtiny:

- šestnástková – hexadecimálna

Ako by sa volala šestnástková sústava v latinčine?

Mohli by sme predsa písať napríklad $\boxed{15}$.

Najznámejšie pozičné sústavy sú desiatková, dvojková, šestnástková, osmičková. Vo všeobecnosti môže byť n-árna číselná sústava, číslo n je základ sústavy a určuje, mocninou akého čísla sa cifry násobia, a tiež počet možných cifier. T. j. v desiatkovej sústave je základ číslo 10, cifry sa násobia číslami 10^0, 10^1, 10^2, $\ldots$ a cifry môžu byť $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. V dvojkovej sústave je základ číslo 2, cifry sa násobia mocninami čísla 2, cifry môžu byť 0 alebo 1. Môžeme si všimnúť, že v šestnástkovej sústave sú cifry nielen 0 až 9, ale aj $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$. Je to preto, že potrebujeme 16 rôznych symbolov pre cifry. Mohli sme ich označiť 0 až 15, nevedeli by sme však povedať, či 15 je jedna cifra alebo dve. Z praktických dôvodov sa zvolili jednoznakové cifry.

1.4. Operácie v desiatkovej sústave

Opíšme si základné operácie v desiatkovej sústave – sčítavanie, odčítavanie, násobenie a delenie, aby sme si uvedomili činnosti, ktoré vieme vykonávať automaticky.

Súčet čísel

Algoritmus sme spomínali pred chvíľou. Je to presne definovaný postup krokov, ktorý nás dovedie k výsledku

Sčítavať čísla nás učili už dávno. Malé čísla sa sčítavali spamäti, na veľké nás učili algoritmus. Čísla sme napísali pod seba a cifry bolo treba sčítavať „odzadu“. Teraz si ukážeme známy postup a zamyslíme sa nad tým, prečo funguje. Lepšie tak pochopíme princíp zápisu čísel v desiatkovej sústave a pomôže nám to získať nadhľad nad ľubovoľnou n-árnou sústavou.

Môže byť viac ako dvojciferný? Kedy? Ako postupujeme vtedy?

Postup: Sčítance napíšeme pod seba zarovnané doprava. Postupujeme od posledných cifier k prvým (sprava doľava). Sčítame cifry v stĺpci a do rovnakého stĺpca vo výsledku napíšeme súčet, ak je jednociferný, alebo poslednú číslicu súčtu, ak je dvojciferný. Ak bol dvojciferný, prenesieme druhú cifru do ďalšieho stĺpca. Tú musíme do súčtu zarátať tiež. Keď spočítavame iba dve cifry, výsledok môže byť najviac 18. V našom príklade môže byť eventuálna druhá cifra súčtu len 1. V nasledujúcom výpočte sme rovnakou farbou označili cifry na rovnakých pozíciách.

$$
\begin{array}{cccc}
10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \\
 & 6 & 3 & 5 \\
4 & 7 & 8 & 1 \\
\hline
 & & & 6 \\
 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
5 & 4 & 1 & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&635 + 4781 = \\
&635 + 4781 = \\
&= 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = \\
&= 4 \cdot 1000 + (6+7) \cdot 100 + (3+8) \cdot 10 + (5+1) \cdot 1 = \\
&= 4 \cdot 1000 + 13 \cdot 100 + 11 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = \\
&= 4 \cdot 1000 + 1 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = \\
&= 5 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = \\
&= 5416
\end{aligned}
$$

Rozdiel čísel

Rozdiel čísel sa od súčtu veľmi nelíši. Rovnakým spôsobom ako pri sčítavaní postupujeme po jednotlivých cifrách sprava doľava. Teraz ale cifru v druhom riadku odpočítavame od cifry v prvom riadku. Ak je výsledok kladný, je to rovno cifra výsledku.

Ak je ale záporný, musíme si „požičať desiatku“, teda jednotku z cifry vľavo, ako to vidíme pri zelených, žltých a červených číslach v nasledujúcom príklade.

$$
\begin{gathered}
4105 - 942 = \\
4105 - 942 = \\
= (4 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1) - (9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1) = \\
= 4 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1 - 9 \cdot 100 - 4 \cdot 10 - 2 \cdot 1 = \\
= 4 \cdot 1000 + (1 - 9) \cdot 100 + (0 - 4) \cdot 10 + (5 - 2) \cdot 1 = \\
= (4 - 1) \cdot 1000 + (11 - 9 - 1) \cdot 100 + (10 - 4) \cdot 10 + (5 - 2) \cdot 1 = \\
= 3 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = \\
= 3163
\end{gathered}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \\
4 & 1 & 0 & 5 \\
- & 9 & 4 & 2 \\
\hline
3 & 1 & 6 & 3
\end{array}
$$

Súčin čísel

Vynásobiť dve viacciferné čísla je už trocha ťažšie. Základom je uvedomiť si, že stačí vedieť násobiť viacciferné číslo jednociferným. V takomto prípade postupne násobíme jednociferným číslom cifry druhého čísla sprava doľava, teda od najnižších rádov k vyšším. Pri vynásobení dvoch cifier môžeme dostať číslo od 0 po 81. V prípade jednociferného čísla je to priamo cifra výsledného súčinu, ak je dvojciferné, do výsledku zapíšeme jeho druhú cifru a prvá tvorí tzv. prenos do vyššieho rádu. Prenos musíme pripočítať k cifre výsledku, ktorá je najbližšia vľavo. Pri násobení viacciferného čísla viacciferným postupujeme tak, že druhé číslo si „rozložíme“ na cifry, ktoré, pravdaže, nesmieme zabudnúť vynásobiť 10 toľkokrát, na koľkej pozícii sa cifra nachádza (pozície sú očíslované od 0). Nakoniec ešte musíme spočítať toľko čísiel, koľko cifier malo druhé číslo, ktorým sme násobili. Pred chvíľou sme si ukázali, ako spočítať dve čísla. To stačí, aby sme sčítali ľubovoľný počet čísiel. Sčítaním dvoch čísiel klesne počet sčítancov o jedna, takže ak sme násobili c-ciferným číslom, sčítavame c čísiel po $c - 1$ sčítaniach budeme mať hľadaný výsledok násobenia.

Takže k súčinu dvoch cifier ešte treba pripočítať aj prenos. Správne je teda, že môžeme dostať číslo od 0 po 90, však?

$$
\begin{gathered}
364 \cdot 156 = \\
364 \cdot 156 = \\
364 \cdot (100 + 50 + 6) = \\
364 \cdot (1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6) = \\
364 \cdot 1 \cdot 100 + 364 \cdot 5 \cdot 10 + 364 \cdot 6) = \\
364 \cdot 100 + 1820 \cdot 10 + 2184 = \\
56784
\end{gathered}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
10^4 & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \\
 & & 3 & 6 & 4 \\
 & \cdot & 1 & 5 & 6 \\
\hline
 & 2 & 1 & 8 & 4 \\
1 & 8 & 2 & 0 & \\
3 & 6 & 4 & & \\
\hline
5 & 6 & 7 & 8 & 4
\end{array}
$$

Podiel čísel

Podiel je z uvedených štyroch aritmetických operácií asi najzložitejší. Intuitívne je to asi zrejmé, pretože ľubovoľné dve čísla sa dajú sčítať, odčítať, alebo vynásobiť, ale nie každé dve čísla sa dajú bezo zvyšku vydeliť. Keď máme dve čísla X, Y a máme určiť X/Y, máme vlastne zistiť, koľkokrát sa číslo Y nachádza v čísle X. Najjednoduchšie je to určiť postupným odčítavaním čísla Y od čísla X. Ak dosiahneme nulu, číslo Y delí X bezo zvyšku. V prípade, že sme nulu nedosiahli, musíme sa raz dostať do situácie, že výsledok odpočítania Y by už bol záporný. Vtedy sa Y nachádza v X so zvyškom, ktorý sa rovná tomu číslu, od ktorého sme Y už nevedeli viac odpočítať. Tento spôsob nie je veľmi šikovný, najmä v prípade, keď je Y oveľa menšie než X, pretože počet odčítaní Y od X je úmerný veľkosti podielu X/Y. V praxi sa používa rýchlejší, ale zložitejší spôsob, ktorý vyžaduje počet odčítaní a násobení úmerný počtu cifier podielu X/Y.

Skúste vypočítať $20\,092\,009/19$ len postupným odčítaním a zvyčajným spôsobom a porovnajte počet potrebných odčítaní a násobení.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & : 158 = 359 \\
- & 4 & 7 & 4 & & & \\
\hline
 & & 9 & 3 & 8 & & \\
 & - & 7 & 9 & 0 & & \\
\hline
 & & 1 & 4 & 8 & 9 & \\
 & - & 1 & 4 & 2 & 2 & \\
\hline
 & & & & 6 & 7 &
\end{array}
$$

Výsledok delenia $56789/158$ je 359, zvyšok 67.

1.5. Dvojková pozičná sústava

Dvojková sústava hrá v informatike dôležitú úlohu. Využívajú ju všetky digitálne technológie. Používa ju aj počítač. Aby sme dokázali lepšie porozumieť niektorým princípom práce počítača, budeme sa jej teraz stručne venovať. Jeden z dôvodov, prečo sa dvojková sústava používa, je jednoduchosť, s akou sa v nej dajú vykonávať aritmetické operácie a realizovať potrebné elektrické obvody. Dvojková sústava sa od desiatkovej líši len tým, že namiesto 10 cifier používa len dve – 0 a 1 – a hodnota cifry na pozícii p sa násobí 2^p a nie 10^p. Keďže máme iba dve cifry, z ktorých je navyše jedna 0, je ľahko vidieť, že sčítanie aj násobenie bude veľmi jednoduché. Cifra v dvojkovej sústave sa nazýva aj bit, používa sa aj skratka b. Osemciferné číslo v dvojkovej sústave sa nazýva byte, skratka B.

$0+0=0$,
$0+1=1$,
$1+0=1$,
$1+1=10$.
$0\cdot 0=0$,
$0\cdot 1=0$,
$1\cdot 0=0$,
$1\cdot 1=1$.
Takže platí $8\,\mathrm{b} = 1\,\mathrm{B}$.

1.6. Prevod medzi číselnými sústavami

Prevod čísel z desiatkovej do dvojkovej sústavy: Jednotlivé cifry čísla v dvojkovej sústave budeme zapisovať odzadu.

1. Zapíšeme zvyšok čísla po delení číslom 2.
2. Číslo vydelíme číslom 2.
3. Pokračujeme 1. krokom, až kým sa číslo nezmenší na nulu.

Skúste si previesť číslo z desiatkovej do desiatkovej sústavy

Na nasledujúcom obrázku je prevod čísla 89 do dvojkovej sústavy. Skúste ho samostatne previesť podľa uvedeného návodu.

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	1	0	0	1

$$= 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$
$$= 64 + 16 + 8 + 1 = 89$$

Binárna sčítačka. Zdroj: http://blog.nelmezzo.net/

Čísla 2 a 10 v dvojkovej, resp. desiatkovej sústave sa nazývajú základ. Keď si pozornejšie všimneme, čo sa v návode na prevod čísla x vlastne deje, vidíme, že nerobíme nič iné, iba zisťujeme, koľko ktorých mocnín základu musíme zobrať, aby sme v súčte dostali x. Aby sme sa vyhli pri zápise čísiel nedorozumeniam, akú sústavu používame, základ sústavy zapíšeme k číslu ako pravý dolný index, napríklad

$$(10)_2 = (2)_{10}, \qquad (1101)_2 = (13)_{10}, \quad (1011001)_2 = (89)_{10}.$$

V prípade, že chceme číslo previesť do inej sústavy, v predchádzajúcom algoritme zameníme číslo 2 za príslušný základ.

Pozrime sa teraz na sčítavanie čísiel v dvojkovej pozičnej sústave. Ako sme už spomínali, je to ľahšie než v desiatkovej sústave, lebo sa stačí naučiť sčitovať len dve cifry, 0 a 1. Inak postupujeme rovnako ako v desiatkovej sústave, obe čísla si napíšeme pod seba zarovnané doprava a začneme spočítavať cifry, ktoré sú nad sebou sprava doľava. V dvoch situáciách: $(1)_2 + (1)_2$ a $(1)_2 + (1)_2 + (1)_2$ dostaneme dvojciferné výsledky $(10)_2$ a $(11)_2$, vtedy zapíšeme do výsledku pravú cifru, teda 0 alebo 1 a 1 bude prenos do vyššieho rádu.

Skúste sami navrhnúť postup na sčitovanie bez toho, aby ste čítali ďalej.

Kedy nastane situácia $(1)_2 + (1)_2 + (1)_2$?

1.7. Niektoré ďalšie pozičné sústavy

Okrem dvojkovej sústavy sa často používa v súvislosti s počítačmi šestnástková alebo osmičková sústava. Ich hlavnou výhodou je, že umožňujú rýchly prevod z/do dvojkovej sústavy a poskytujú kompaktnejší zápis. Pretože $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ a $16 = 2^4$, ľahko vidíme, že trojice, resp. štvorice dvojkových cifier tvoria jednu cifru v osmičkovej, resp. šestnástkovej sústave. Platí, že

$$\begin{array}{llll}(000)_2 = (0)_8, & (001)_2 = (1)_8, & (010)_2 = (2)_8, & (011)_2 = (3)_8,\\ (100)_2 = (4)_8, & (101)_2 = (5)_8, & (110)_2 = (6)_8, & (111)_2 = (7)_8.\end{array}$$

Takže dvojkové číslo stačí rozdeliť na trojbitové kúsky sprava doľava, a keď každý nahradíme zodpovedajúcou cifrou v osmičkovej sústave, máme celé číslo zapísané v osmičkovej sústave. Všimnite si, že na zápis každého čísla nám stačí len tretina symbolov, ako keď je číslo zapísané v dvojkovej sústave. Na druhej strane už nevystačíme len s dvoma symbolmi, ale potrebujeme ich osem. Niekoľko príkladov:

$$(10\,110\,100)_2 = (264)_8, \quad (111\,011\,101)_2 = (735)_8, \quad (1\,010\,011)_2 = (123)_8.$$

Analogicky postupujeme aj pri šestnástkovej sústave, len teraz dvojkové číslo rozdelíme na štvrorbitové kúsky. Platí, že

$$\begin{array}{llll}(0000)_2 = (0)_{16}, & (0001)_2 = (1)_{16}, & (0010)_2 = (2)_{16}, & (0011)_2 = (3)_{16},\\ (0100)_2 = (4)_{16}, & (0101)_2 = (5)_{16}, & (0110)_2 = (6)_{16}, & (0111)_2 = (7)_{16},\\ (1000)_2 = (8)_{16}, & (1001)_2 = (9)_{16}, & (1010)_2 = (\mathrm{A})_{16}, & (1011)_2 = (\mathrm{B})_{16},\\ (1100)_2 = (\mathrm{C})_{16}, & (1101)_2 = (\mathrm{D})_{16}, & (1110)_2 = (\mathrm{E})_{16}, & (1111)_2 = (\mathrm{F})_{16}.\end{array}$$

Dvojkové čísla s predchádzajúceho príkladu zapísané v šestnástkovej sústave

$$(1011\,0100)_2 = (\mathrm{B4})_{16}, \quad (1\,1101\,1101)_2 = (1\mathrm{DD})_{16}, \quad (101\,0011)_2 = (53)_{16}.$$

1.8. S akými číslami dokáže počítač pracovať

Predovšetkým si treba uvedomiť, že počítač pracuje len s číslami v dvojkovej sústave. Navyše má pre každé číslo vyhradený iba obmedzený počet bitov! Napríklad to môže byť $8\,\mathrm{b}$, $16\,\mathrm{b}$, $32\,\mathrm{b}$, $64\,\mathrm{b}$ alebo $128\,\mathrm{b}$. V súčasnosti je to najčastejšie $32\,\mathrm{b}$. To vysvetľuje, prečo počítač vie pracovať iba s číslami z istého intervalu. Vedeli by ste vypočítať, aké najväčšie číslo sa zmestí do $32\,\mathrm{b}$?

No predsa $2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295$.

To, že čísla sú v počítači uložené len v istom pevnom počte bitov, má zaujímavé dôsledky. Predstavme si, že čísla sú uložené v bytoch. V jednom byte môžeme uložiť čísla 0 až 255. Čo sa stane keď máme číslo 255, t.j. $(11111111)_2$, a pripočítame k nemu 1? Presne to, čo asi neočakávame, dostaneme $(00000000)_2$, teda nulu. Vidíme, že čísla v počítači sa správajú trochu inak, ako sme si asi predstavovali. A čo keď chceme odpočítať 1 od 0, teda od $(00000000)_2$? Ak označíme tento výsledok V, hoci zatiaľ nevieme aký bude, bude rozumné, keď bude platiť $V + 1 = 0$. Takže je to jasné: V musí byť 255 (nezabudnite: stále pracujeme s bytmi)!

Nič prekvapujúce, aj po čase 23:59 predsa nasleduje 00:00.

Návod na vytvorenie záporného čísla k číslu n v dvojkovej sústave je takýto:

1. Zameň v dvojkovom zápise čísla n všetky 0 na 1 a 1 na 0.
2. Ku vzniknutému číslu pripočítaj 1.

Stále pracujeme s číslami v bytoch. Napríklad k číslu 10 vytvoríme záporné číslo -10. Najprv si prepíšeme 10 do dvojkovej sústavy: $(00001010)_2$, teraz zameníme vzájomne 1 a 0. Dostaneme $(11110101)_2$ a pripočítame 1 a máme $(11110110)_2$, čo je dvojkový zápis čísla -10.

Naozaj platí, že

$$\begin{array}{r} 00001010 \\ 11110110 \\ \hline 00000000 \end{array}$$

Zatiaľ sme si vysvetlili iba prácu s celými číslami v dvojkovej sústave. Občas treba používať aj reálne čísla. Logický spôsob zapisovania v dvojkovej sústave je taký, že za desatinou čiarkou budú ďalšie bity hodnôt $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$, $2^{-3} = \frac{1}{8}$, ... Takže napríklad $(12{,}5)_{10} = (1010{,}1)_2$, $(0{,}75)_{10} = (0{,}11)_2$.

Treba si uvedomiť, že v počítači vieme zapisovať konečný počet cifier, takže problémom sú čísla s nekonečným rozvojom v dvojkovej sústave, ako napríklad $\frac{1}{3}$ alebo $0{,}4$. Z toho dôvodu pri práci s reálnymi číslami si treba dávať veľký pozor na zaokrúhľovanie a porovnávanie.

1.9. Príklady

1. Zahrajte sa nasledovnú hru s názvom binárny kamzík. Niekoľko (optimálne šesť) ľudí sa postaví vedľa seba. Ľudia sa očíslujú sprava doľava nasledovne: Najpravejší človek má číslo 1, vedľa neho 2, vedľa 4, vedľa 8, vedľa 16 a vedľa 32, t. j. i. človek sprava má číslo 2^{i-1}. Každý predstavuje príslušný bit čísla. Ak je človek hore, v čísle na jeho mieste je 0, ak je dole – v drepe, predstavuje číslo 1. To znamená, že ak sú ľudia postavení hore, hore, hore, dole, hore, dole, dokopy predstavujú číslo $5 = 4 + 1$.

   Ak nevládzete, môžete robiť „drepy“ rukami – ruka hore bude 1, ruka dole 0.

   Podľa predchádzajúcich pravidiel vyrobte čísla 0 až 63.

   (a) Všimnite si, že každý človek spraví rovnaký počet drepov. Prečo to tak je?
   (b) Koľko ľudí treba, ak by ste chceli reprezentovať číslo 235?
   (c) Ak vyrábate čísla zaradom, je to ľahšie, dá sa nájsť algoritmus priamo pre každého človeka, nezávislý od ostatných. Vyskúšajte si reagovať spontánne na zadané číslo, t. j. vedúci skupiny povie 7, a iba posledný traja ľudia spravia drep, ostatní ostanú hore.
   (d) Vymyslite podobnú hru na precvičovanie trojkovej sústavy.

2. Jasnovidec nechá dobrovoľníka vybrať jedno z čísel:

   $$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15$$

   Potom dobrovoľník povie, či je, alebo nie je toto číslo postupne v jednotlivých riadkoch:

1	3	5	7	9	11	13	15
2	3	6	7	10	11	14	15
4	5	6	7	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15

   Potom jasnovidec číslo uhádne, aj keď si nič nezapisuje, ani neškrtá. Napríklad pri odpovedi áno, nie, nie, áno to bolo číslo 9. Prečo sa mu to darí?

3. Doplňte číslice namiesto otáznikov, aby platila rovnosť.

$$110?01?1 + 10010?10 = 1?101100?$$

4. Dokážte, že od posledného bitu čísla v dvojkovej sústave závisí parita čísla. Čo viete povedať o čísle, ak viete hodnotu poslednej číslice v nejakej zadanej číselnej sústave?

Párne, alebo nepárne?

5. Navrhnite postup na delenie čísel v dvojkovej pozičnej sústave.
6. Rozkrojíme jablko na polovicu, túto polovicu znovu na polovicu, takto pokračujeme n-krát. Pre aké číslo n bude posledný rozkrojený kúsok jablka jeden atóm?
7. Preveďte čísla $163, 13, -5$ do dvojkovej sústavy.
8. Preveďte čísla $010010, 1111, 1100100$ do desiatkovej sústavy.
9. Koľko pamäte potrebujeme na evidenciu rodného čísla? Koľko pamäte potrebujeme na zaznamenanie rodných čísel všetkých obyvateľov Slovenska?

2. Práca s matematickými výrazmi

Najdôležitejší matematický symbol v tejto téme je symbol „=“.

Úprava matematického výrazu znamená zmeniť výraz tak, aby bola zachovaná rovnosť medzi hodnotou výrazu pred úpravou a po jeho úprave. Väčšinou úpravou rozumieme zjednodušenie výrazu tak, aby bol pre používateľa prijateľnejší alebo vhodnejší pre jeho ďalší postup. Prácu s matematickými výrazmi síce nemôžeme nazvať priamo matematikou, ale žiadny matematik sa bez tejto zručnosti nezaobíde, preto aj my venujeme jednu kapitolu nácviku tejto činnosti.

V tomto odseku sa nachádzajú vzorce, na úrovni stredoškolského učiva, potrebné na úpravu matematických výrazov. Nie je potrebné tieto vzorce ovládať, stačí si ich v prípade potreby vyhľadať.

zátvorky

umocňovanie

odmocňovanie

násobenie

delenie

sčitovanie

odčitovanie

2.1. Operácie s číslami a symbolmi, poradie vykonávania operácií

Vo výraze sa ako prvé upravujú zátvorky, potom sa vykonajú operácie umocňovania a odmocňovania, potom nasledujú operácie násobenia, delenia, sčitovania a odčitovania.

Napríklad $2 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = 21$ alebo $2^3 + 5 \cdot \sqrt{100} = 58$.

V prípade, že chceme operáciám priradiť vyššiu prioritu, použijeme zátvorky:

$2 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = 21$ alebo $2 \cdot (3 + 10) \cdot 5 = 130$ alebo $(2 \cdot 3 + 10) \cdot 5 = 80$

$2^3 + 5 \cdot \sqrt{100} = 58$ alebo $2^{(3+5)} \cdot \sqrt{100} = 2560$

Francúzsky matematik Blaise Pascal vynašiel fúrik

Znalosť vzorcov zjednoduší manipuláciu s matematickými výrazmi. Koeficienty n-tej mocniny dvojčlena sa vypočítajú ako kombinačné čísla $\binom{n}{k}$, pre $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Sú to však aj čísla, ktoré nájdeme v n-tom riadku Pascalovho trojuholníka.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Blaise Pascal objavil pravidlo, ako vyrobiť trojuholník pozostávajúci z koeficientov v rozvoji $(a+b)^n$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \quad b^n$$

Vedeli by ste povedať, aký koeficient je pri b^n?

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$$

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Napríklad

$$48 = 49 - 1 = 7^2 - 1^2 = (7-1) \cdot (7+1) = 6 \cdot 8$$

2.2. Sčitovanie a násobenie komutatívnosť, asociatívnosť, distributívnosť

K definíciám vlastností uvedených v tomto odseku je potrebné uviesť, pre aké číselné obory vlastnosť platí.

Komutatívnosť znamená zameniteľnosť poradia:

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Operácie sčitovania a násobenia sú komutatívne.
Napríklad:

$$3 + 4 = 4 + 3 \qquad\qquad 5 \cdot 6 = 6 \cdot 6$$

Ale operácie odčitovania a delenia nie sú komutatívne.

$$a - b \neq b - a \qquad\qquad a : b \neq b : a$$

Napríklad:

$$5 - 7 \neq 7 - 5 \qquad\qquad 6 : 3 \neq 3 : 6$$

Asociatívnosť znamená možnosť ľubovoľného zoskupovania jednotlivých členov:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Operácie sčitovania a násobenia sú asociatívne.
Napríklad:

$$(2 + 4) + 6 = 6 + 6 = 12 = 2 + (4 + 6) = 2 + (10) = 12 \qquad\qquad (1 \cdot 2) \cdot 3 = 1 \cdot (2 \cdot 3)$$

Ale operácie odčitovania a delenia nie sú asociatívne.

$$(a - b) - c \neq a - (b - c) \qquad\qquad (a : b) : c \neq a : (b : c)$$

Napríklad:

$$(12 - 10) - 2 \neq 12 - (10 - 2) \qquad\qquad (36 : 6) : 3 \neq 36 : (6 : 3)$$

Distributívnosť je pravidlo, podľa ktorého sa roznásobí súčet dvoch alebo viacerých sčítancov:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a + b + c) \cdot d = a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$$

Napríklad:

$$(3 + 7) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 7 \cdot 2$$

$$(5 + 2 + 4) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3$$

$$(5 + 2) \cdot (4 + 3) = 5 \cdot (4 + 3) + 2 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

2.3. Úprava lomených výrazov (práca so zlomkami)

Pri práci so zlomkami si treba najprv uvedomiť, že menovateľ žiadneho zlomku nemôže byť číslo 0.

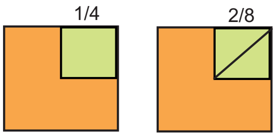
Čo sa stane, keď delíme nulou? Prečo je pohodlnejšie delenie nulou zakázať?

$$z = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Dva zlomky $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ sa rovnajú, ak platí

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Naozaj sa zlomky $\frac{1}{4}$ a $\frac{2}{8}$ navzájom rovnajú?



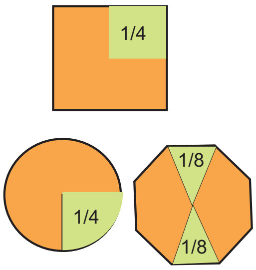
Z rovnosti $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b$ dostaneme pre $b, c \neq 0$ predpisy pre rozširovanie alebo krátenie zlomkov

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$
$$\frac{a : c}{b : c} = \frac{a}{b}$$

Zjednodušenie zloženého zlomku dostaneme z rovnosti:

$$\frac{a}{b} \cdot (b \cdot c) = (a \cdot d) \cdot \frac{c}{d}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$



Sčítanie a násobenie zlomkov znovu odvodíme z predpisu pre rovnosť zlomkov

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

2.4. Práca s mocninami a odmocninami

Pre reálne čísla x, a, b a celé kladné číslo n je:

$$x^0 = 1, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = x \cdot x, \qquad x^3 = x \cdot x \cdot x, \qquad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n}$$

Pre mocniny s celým kladným exponentom n platí:

$$0^n = 0, \quad 1^n = 1, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

Pre mocniny s celočíselným exponentom n a pre kladné x platí:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Nezáporné číslo x, ktoré je (pre kladné n) riešením rovnice $x^n = a$ sa nazýva n-tá odmocnina z a a značíme $x = \sqrt[n]{a}$.
Platí:

$$\sqrt[n]{0} = 0, \quad \sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[1]{a} = a, \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\tfrac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$
$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a^{n+m}}$$

Odstránenie odmocniny z menovateľa zlomku:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}, \qquad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

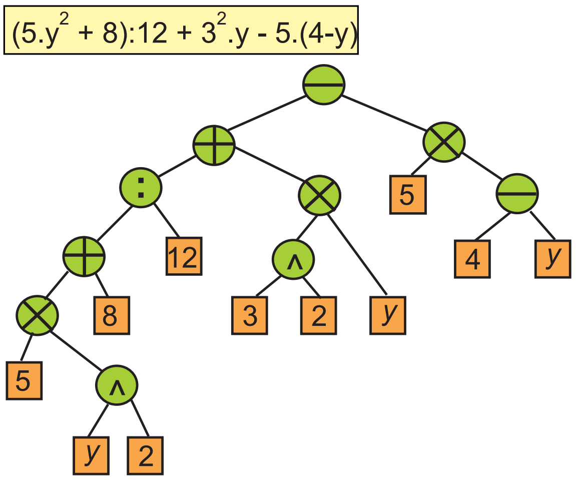
Napríklad:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$$

2.5. Vyhodnocovanie výrazov a ich vizualizácia v tvare koreňového stromu

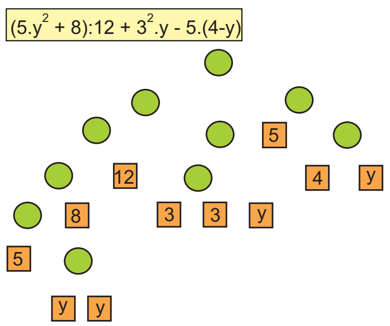
Jednotlivé kroky upravovania matematického výrazu majú určené svoje poradie. Dobrým cvičením pre predstavu toho, ktoré operácie treba vykonať skôr a ktoré neskôr, je zápis výrazu v tvare aritmetického stromu.

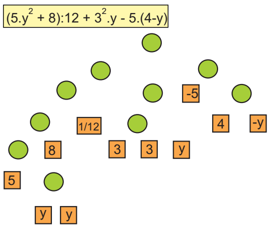
Na základe obrázku vysvetlite, ako k danému výrazu vytvoríme schému na vykonávanie jednotlivých operácií, nazývanú aritmetický strom.



Úloha

Vytvorte schému pre rovnaký výraz ako v predchádzajúcej úlohe, ale nepoužívajte operáciu umocňovania.





Úloha

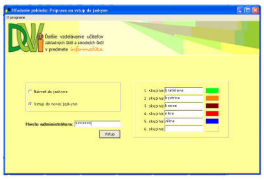
Vytvorte schému pre rovnaký výraz ako v predchádzajúcej úlohe, ale používajte iba operácie násobenia a sčítania.

Úloha

Vytvorte schému pre výraz

$$(x \cdot 3 + 5) \cdot (x + 5) + x + 7$$

2.6. Hľadanie pokladu, súťaž skupín v riešení úloh



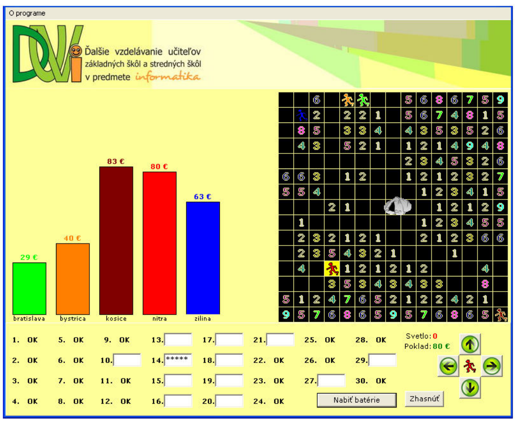
Na zorganizovanie tejto súťaže potrebujeme počítač s programom a dataprojektorom a organizátora, ktorý skontroluje výsledky. Program je zbalený v súbore `poklad.zip`, ktorý obsahuje aj podrobný popis programu. Organizátor ďalej potrebuje súbory so zadaniami a s výsledkami úloh, pri výsledkoch je dobré mať poznačený aj kód pre danú úlohu.

Organizátor súťaže má náročnú úlohu, pretože kontroluje riešenia, odovzdáva za správne riešenia kódy a zároveň kontroluje prácu pri počítači.

Precvičovanie manipulácie s matematickými výrazmi nie je obľúbenou aktivitou ani pre samotných matematikov. Napriek tomu je táto zručnosť potrebná a nemala by spotrebovať energiu potrebnú na rozmýšľanie. Na tréning takejto zručnosti môžeme použiť súťaž medzi skupinami riešiteľov.

Účastníci sa rozdelia do niekoľkých skupín (po 5–8 účastníkov). Každá skupina dostane na začiatku sériu 30 úloh a heslo na prístup do počítača. Keď niekto zo skupiny vyrieši úlohu, vysvetlí jej riešenie organizátorovi. Na základe správneho riešenia organizátor prezradí riešiteľovi kód k danej úlohe. Keď majú členovia skupiny aspoň jeden kód od opravovateľa, zadajú kód do počítača. Po zadaní správneho kódu pribudne svetlo na jeden krok v tme, potom môže pohnúť svojou postavičkou a zbierať peniaze (číslo v políčku znamená veľkosť pokladu na tomto políčku). Postavička nemôže vstúpiť na políčko, na ktorom práve stojí iná postavička, ani mimo hracieho poľa. Hra končí po uplynutí časového limitu. Výsledné poradie skupín v hre je určené finančným ziskom na konci hry. Počítačový program `poklad.zip` je možno nájsť na adrese projektu DVUI, v kurze Matematika pre informatikov, v téme Práca s matematickými výrazmi: `http://dvui.ccv.upjs.sk/kurzy`.
Jeho súčasťou sú súbory: `poklad.exe` (spúšťací program), `kody.txt` (kódy, ktoré súťažiaci získavajú za vyriešené úlohy, `limit.txt` (časový limit na konanie celej hry), `pole.txt`(tvar hracej plochy), `hesla.txt` (heslá na vstup do hry pre administrátora aj pre jednotlivé skupiny hráčov) a `popisprogramu.doc`.

Na začiatku súťaže navodíme atmosféru rozprávaním o tom, že sme sa dostali do bludiska plného tajných miestností a pokladov. Skupiny účastníkov sú hľadačmi pokladu. Po vypočítaní príkladu a zadaní tajného kódu, sa v temnote bludiska objaví svetlo, ktoré vydrží počas prehľadávania jednej miestnosti.



2.7. Úlohy pre hľadanie pokladu

V tejto prílohe sú úlohy, ktoré sa budú v súťaži *Hľadanie pokladu* riešiť. Prosíme nepočítajte ich dopredu sami, budeme ich riešiť spoločne.

1. Pridajte do výrazu ľubovoľný počet zátvoriek tak, aby mal čo najväčšiu hodnotu. Zistite, akú najväčšiu hodnotu môže výraz nadobudnúť.

$$3 \cdot 8 + 6 : 2 + 12 \cdot 5 \cdot 6$$

2. Pridajte do výrazu ľubovoľný počet zátvoriek tak, aby mal čo najmenšiu hodnotu. Zistite, akú najmenšiu hodnotu môže výraz nadobudnúť.

$$3 \cdot 8 + 6 : 2 + 12 \cdot 5 \cdot 6$$

3. Upravte výrazy tak, aby ste dostali výraz, ktorý neobsahuje zátvorky:
a) $(2x+1)(x+2)$, b) $(2x+2y)(x+y)$, c) $(x+2x+z)(3x+1)$

4. Upravte výrazy tak, aby ste dostali výraz, ktorý neobsahuje zátvorky:
a) $(2x+1)(2x+1)(2x+1)$, b) $(2x+2y)(x+y+z)$,
c) $(x+2x+z)(3x+z+1)$

5. Upravte výrazy tak, aby ste dostali výraz, ktorý neobsahuje zátvorky:
a) $(2x+1)^2$, b) $(2x+2y)^2$, c) $(x+2x+z)^2$

6. Nakreslite obrázok, z ktorého vidno, že pre $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a > b$, platí

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

7. Znakom $\heartsuit$ sú označené chýbajúce časti výrazov. Doplňte chýbajúce čísla, aby platili rovnosti a napíšte, koľko je $\heartsuit$:
a) $x^2 - 18x + 81 = (x - \heartsuit)^2$, b) $x + \heartsuit x + \heartsuit = (x+2)^2$,
c) $(x + \heartsuit)^2 = x^2 + 2\heartsuit x + \heartsuit^2$

8. Znakom $?$ sú označené chýbajúce časti výrazov. Doplňte chýbajúce čísla a znamienka tak, aby platili rovnosti:
a) $x^2 - ?x + 36 = (x - ?)^2$, b) $x + ?x + ? = (x?5)^2$,
c) $(?x - ?)^2 = 25x^2 - ?x?25$

Vzorec pre výpočet súčtu prvých n druhých mocnín je:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9. Vypočítajte
a) $\sum\limits_{k=3}^{5} 2k+1$, b) $\sum\limits_{k=-1}^{2} k^2$, c) $\sum\limits_{k=0}^{20} k$, d) $\sum\limits_{k=0}^{20} (k-1)(k+1)$

Vzorec pre výpočet súčtu prvých n členov geometrickej postupnosti je:

$$a \cdot 1 + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n = \\ = \frac{a \cdot (1 - q^{n+1})}{1-q}$$

10. Vypočítajte
a) $\sum\limits_{j=3}^{5} 2^j$, b) $\sum\limits_{j=-1}^{2} 3^j$, c) $\sum\limits_{j=0}^{20} 5^j$, d) $\sum\limits_{j=0}^{20} 5$

11. Vypočítajte
a) $\prod\limits_{k=1}^{3} 2$, b) $\prod\limits_{k=-1}^{4} k$, c) $\prod\limits_{k=3}^{15} \dfrac{k}{k-1}$

12. Vypočítajte
a) $\prod\limits_{j=3}^{5} \dfrac{2^j}{2^{j-2}}$, b) $\prod\limits_{j=-1}^{20} j$, c) $\prod\limits_{j=1}^{12} 5^j$

13. Ktoré z nasledujúcich výrazov nie sú druhou mocninou dvojčlena?
a) x^2+8x+8, b) $x^2+8x+16$, c) $x^2+8x+32$, d) x^2+8x+4

14. Zmeňte koeficient pri lineárnom člene tak, aby sa nasledujúce výrazy stali druhou mocninou dvojčlena.
a) x^2+8x+8, b) $x^2+8x+16$, c) $x^2+8x+32$, d) x^2+8x+4

15. Zmeňte absolútny člen tak, aby sa nasledujúce výrazy stali druhou mocninou dvojčlena.
a) $x^2 + 8x + 8$, b) $x^2 + 8x + 16$, c) $x^2 + 8x + 32$, d) $x^2 + 8x + 4$

16. Zmeňte koeficient pri kvadratickom člene tak, aby sa nasledujúce výrazy stali druhou mocninou dvojčlena.
a) $x^2 + 8x + 8$, b) $x^2 + 8x + 16$, c) $x^2 + 8x + 32$, d) $x^2 + 8x + 4$

17. Opravte chybu tak, že zmeníte iba jedno číslo:
a) $25 - 15x + 9x^2 = (3x - 5)^2$, b) $9x^2 + 9x + 1 = (3x + 1)^2$

18. Zmeňte čo najmenší počet čísel tak, aby sa zo zápisu stala pravdivá rovnosť:

$$9x^2 + 36x + 4 = (3x + 5)^2$$

19. Nakreslite výraz v tvare aritmetického stromu:

$$x \cdot 3 + 4 \cdot (y + 2) + 2$$

20. Vydeľte dva polynómy:

$$(12x^5 + 2x + 1) : (2x - 1)$$

21. Vydeľte trojčlen dvojčlenom:

$$(12a^5 + 2ab + b) : (a + b)$$

22. Nájdite čísla a, b, c, d tak, aby platilo:

$$\frac{x^4 - x^3 + 2}{x^2 - 3x + 2} = ax^2 + bx + c + \frac{dx + e}{x^2 - 3x + 2}$$

23. Odstráňte odmocniny z menovateľa:

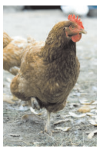
a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$, b) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}}$

24. Zjednodušte:

$$\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{3 + 2\sqrt{3} + 4}\right) : \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} + 3}\right)$$

25. Vyjadrite jedným číslom:

$$\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2} + \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2}$$



26. 4 sliepky znesú 20 vajec za 7 dní. Za koľko dní znesie 5 sliepok 50 vajec?

27. Tento rok v januári Mišo každý deň urobil priemerne 100 drepov a vo februári každý deň priemerne 159 drepov. Koľko priemerne drepov Mišo urobil každý deň za oba mesiace?

Autentická ukážka úlohy zo súťaže iBobor
`http://ibobor.sk/`

28. Julka má obrázok s rozmermi 128×96 pixelov v 256 farbách uložený na disku ako `bobor.bmp`. Tento súbor na disku zaberá 13 366 bajtov. Potrebuje však obrázok menších rozmerov, preto ho zmenšila na veľkosť 64×48. Akú veľkosť bude mať obrázok po zmenšení, keď ho Julka uloží v rovnakom formáte?

29. Robkov dokonalý model Ferrari meria 10 cm a váži 30 g. Koľko váži Janove naozajstné Ferrari, ak meria 3 m?

30. Ako dlho bude trvať prenos sady digitálnych fotografií do webového albumu? Veľkosť sady fotografií je 59 612 663 bitov a rýchlosť internetového spojenia je 30 Mb/s.

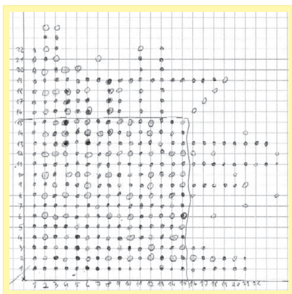
3. O nekonečnom ovocnom sade

Nasledujúci text obsahuje do príbehu zakomponovanú sériu úloh, týkajúcu sa viacerých oblastí matematiky (detaily budú uvedené v texte). Úlohy v príbehu je možné riešiť aj pomocou počítača. Meno hlavnej postavy príbehu nie je, ako by sa mohlo zdať, chybným prekladom slova záhradník. Ide skôr o poctu americkému matematikovi Martinovi Gardnerovi, veľkému propagátorovi matematiky, a špeciálne jej zábavnej alebo záujmovej časti. Významnou časťou jeho diela je súbor 288 článkov, ktoré s mesačnou frekvenciou pod názvom *Mathematical games* uverejňoval od roku 1957 do roku 1980 v časopise Scientific American. Ide o neuveriteľnú zbierku nápadov a inšpirácií, ktorú možno každému len odporučiť. Aj toto rozprávanie vychádza z jeho článku *The lattice of integers considered as an orchard or a billiard table* publikovaného v máji 1965. Teraz je najvyšší čas začať. Pripravte si pero, dve kontrastne farebné fixky, čistý papier na počítanie, štvorčekový na kreslenie a hlavu na myslenie. Po čase sa nám na prácu hodí aj počítač a ľubovoľný programovací jazyk, ktorý ovládate.

3.1. Keď si matematik kúpi záhradu...

Na tomto mieste pripomenieme, že rozprávanie má hlavne motivačný charakter, ktorý má podporiť čitateľa pri riešení úloh. To platí nielen pre účastníkov tohto kurzu, ale aj pre ich žiakov. Téma už bola úspešne odskúšaná so žiakmi stredných škôl.

Jedného dňa sa matematik pán Gardner rozhodol, že začne záhradníčiť. Najskôr si kúpil záhradu. Ako matematik samozrejme nechcel hocakú, ale poriadnu. Najlepšie nekonečnú. Keďže však nebol z najbohatších, miesto celej roviny si mohol dovoliť kúpiť len jej štvrtinu. Svoj pozemok si oplotil dvomi polpriamkovými plotmi a v rohu, kde sa stretávali, si postavil bránku. Potom sa zamyslel, čo a ako bude v záhrade pestovať. V prvom rade mal byť v záhrade poriadok a prehľad. Vyrobil v nej preto pravidelný nekonečný systém hriadok, ktoré mali od seba vždy rovnakú vzdialenosť jeden meter a boli rovnobežné s plotmi. Rastliny sa rozhodol zasadiť do všetkých priesečníkov týchto hriadok. Boli to ovocné stromy, a zase nie hocaké. Volali sa bodovníky. Každý z nich bol 2 metrová úsečka, zasadená pekne a úplne kolmo. O stromy sa dobre staral, pravidelne ich okopával, polieval a tešil sa na úrodu. A tá stála za to. Koncom septembra na vrchu každého stromu-úsečky dozrel jej koncový bod. Pán Gardner ich pozbieral a v zime predával geometrom. Zásoby boli bohaté, veď každý rok zo stromov obral nekonečne veľa bodov. Správna záhrada však svojmu majiteľovi neprináša len ovocie a zisk, ale hlavne pocit z dobre vykonanej práce. Pán Gardner sa preto často rád večer oprel o bránku v rohu záhrady a kochal sa pohľadom na svoje dielo. A práve pri tom si všimol, že sa môže kochať len časťou tohto diela. Niektoré stromy totiž videl v plnej kráse, ale ďalšie boli pri pohľade od bránky zaclonené inými stromami. Táto skutočnosť ho postupne stále viac znervózňovala. Na viditeľných stromoch mohol pohľadom kontrolovať zrelosť bodov, k zakrytým bolo treba prísť. Viditeľnými stromami sa mohol od bránky pochváliť svojim návštevám, neviditeľné ako keby sadil zbytočne. Nakoniec sa rozhodol, že s problémom viditeľnosti stromov sa musí vysporiadať. Samozrejme matematicky.



3.2. Veľké kreslenie

Ako správny matematik si pán Gardner zobral pero a papier a situáciu začal matematicky spracovávať. Najskôr si do svojho plánu začal kresliť, ktoré stromy vlastne z rohu záhady vidí a ktoré nie. My sa ho teraz pokúsime napodobniť.

Úloha 1:

Vyznačte si na štvorčekovom papieri plán záhrady. Umiestnite si ju tak, aby vchod bol v jej ľavom dolnom rohu, respektíve aby sa záhrada rozprestierala do nekonečna smerom na sever a na východ. Čiary zodpovedajú vodorovným a zvislým hriadkam, zvýrazniť preto stačí len plot. Priesečníky čiar, tzv. mrežové body, sú presne miestami, z ktorých vyrastajú bodovníky. Nekonečný papier sa vám asi nepodarilo zohnať, nakreslite však záhradu tak, aby mala rozmer aspoň 20×20 hriadok. A teraz do práce. Pre každý mrežový bod v rozsahu 20×20 hriadok farbou označte, či je z rohu záhrady viditeľný alebo nie. (Pokiaľ kreslíte pomaly, rozsah si zmenšite, ale určite nie pod rozmer 10×10. Označiť viditeľnosť je možné rôznymi spôsobmi, najlepšie sa však osvedčilo bodkovanie pomocou tenkých fixiek.) Medzi pomôckami nebolo spomenuté pravítko, a to úmyselne. Miesto neho je omnoho užitočnejšie využívať pravidelnosť a rytmus štvorčekovej siete.

Počas práce si zvedomujte svoj postup a skúste objaviť a využiť čo najviac metód kreslenia. Urýchli to vašu prácu a poslúži ako podklad pre ďalšie matematické skúmanie situácie.
Riešenie:
Túto prácu musí každý zvládnuť sám. Vlastnoručný obrázok autora berte preto ako ilustráciu jeho snaženia. V ďalšom texte predpokladáme, že čitateľ má k dispozícii svoj obrázok a skúsenosti, ktoré pri jeho výrobe získal.

Úloha 2:

Aké metódy a spôsoby kreslenia a vyznačenia viditeľnosti ste objavili a používali?
Riešenie:
Uvedieme tri najčastejšie metódy.

- Nájdeme niektorý z najbližších zatiaľ nevyhodnotených bodov. Označíme ho ako viditeľný (ak je to pravda; ak nie, treba ísť bližšie) a za ním „skryté“ mrežové body ležiace na predĺžení polpriamky určenej vrcholom záhrady a viditeľným bodom označíme ako neviditeľné. Tieto body na polpriamke je možné hľadať pomocou pravítka, ale ešte lepšie pomocou štvorčekovej siete. Pokiaľ prvý bod je napr. „2 štvorčeky doprava a jeden hore“ od vrcholu, presne v tomto istom rytme za ním nasledujú ďalšie zakryté body.
- Po chvíli kreslenia sa v niektorých riadkoch a stĺpcoch objaví pravidelná vzorka viditeľných a neviditeľných bodov. V stĺpcoch a riadkoch pri plote sú napr. viditeľné všetky body, vo vedľajších sa viditeľné a neviditeľné body striedajú, v ďalších sa striedajú 2 viditeľné a jeden neviditeľný bod atď. Táto pravidelnosť má svoje dôvody, ku ktorým sa dostaneme neskôr. Pri samotnom kreslení však v prípade očividných vzorov môžeme vysvetlenie zatiaľ vynechať a využiť ich pri vypĺňovaní obrázku. Pri pozornejšom kreslení sa môžu objaviť pravidelnosti aj v ďalších polpriamkach (diagonály a pod.).
- Obrázok je symetrický podľa osi pravého uhla tvoriaceho záhradu. Túto skutočnosť môžeme buď priamo využiť pri vykresľovaní bodov (tu je určité riziko chyby pri určení symetrického bodu), alebo pri „symetrickom“ použití vyššie spomenutých postupov.

Samozrejme, je možné, že sa vám podarilo objaviť aj ďalšie metódy. Skúste aj v ďalšom texte sledovať ich využitie a formalizáciu.

Úloha 3:

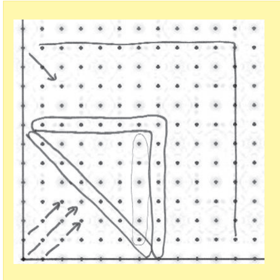
Aké matematické pojmy a objekty môžu žiaci pri riešení týchto úloh použiť alebo sa s nimi intuitívne zoznámiť?
Riešenie:

Zatiaľ na grafickej úrovni tu pracujeme so (súradnicovou) rovinou. Pri kreslení v tomto prostredí sa využíva, resp. buduje pojem polpriamky, smerového vektora a jeho násobkov, podobnosti atď. Myšlienka grafickej pravidelnosti v riešení alebo jeho symetrie patrí k univerzálnym princípom, ktorých objavovanie a využitie by sme mali žiakov naučiť.

3.3. Čo vidíme na obrázku

Po usilovnej práci máme pred sebou zhruba rovnaký obrázok, ako mal na začiatku svojho skúmania aj pán Gardner. Určite ste si už počas kreslenia začali všímať rôzne zaujímavé vlastnosti a útvary, ktoré sa v ňom nachádzajú. Asi je najvyšší čas, aby sme sa o nich porozprávali.

Ako ilustráciu opäť prikladáme pracovný materiál z archívu autora.



Úloha 4:

Čo vás na obrázku s farebne vyznačenou viditeľnosťou mrežových bodov upútalo? Aké z hľadiska viditeľnosti zaujímavé útvary a úkazy sa objavili?
Riešenie:
Uvedieme opäť najčastejšie sa objavujúce odpovede. Niektoré sa opakujú z riešenia úlohy 2, iné sú nové. Porovnajte ich s vlastnými pozorovaniami.

- Obrázok je symetrický. Táto vlastnosť je vzhľadom na skúsenosti z kreslenia taká samozrejmá, že odteraz budeme stĺpcovo-riadkovú symetriu považovať za automatickú a nebudeme ju stále pripomínať. Ak v ďalšom budeme spomínať vlastnosti stĺpcov, myslíme vždy súčasne aj na „symetrické“ vlastnosti riadkov a naopak.
- V stĺpci hneď vedľa plotu sú viditeľné všetky stromy. Naopak na hlavnej diagonále sú všetky stromy okrem prvého neviditeľné. Dve diagonály susediace s hlavnou obsahujú len viditeľné stromy.
- V niektorých stĺpcoch sa pravidelne striedajú 1 viditeľný a 1 neviditeľný strom. O tomto jave budeme hovoriť ako o vzorke $1/1$, takýchto stĺpcov je viac. Objavujú sa aj iné vzorky ($2/1$ a pod.), ich výskyt je už zriedkavejší. Po podrobnejšom skúmaní sa podobné vzorky ukážu aj diagonálach.
- V plániku sa dajú objaviť stĺpce (a riadky), v ktorých sú skoro všetky stromy viditeľné. Pokiaľ sa po nich pohybujeme od plota, prvý neviditeľný strom nájdeme až na hlavnej diagonále a ďalšie v násobkoch tejto vzdialenosti.
- Môžeme upriamiť pozornosť aj na šikmé úsečky kolmé na hlavnú diagonálu. Okrem už známych vzoriek zistíme, že niektoré z týchto úsečiek obsahujú iba viditeľné stromy.
- Pokiaľ sa sústredíme na tieto diagonály (prípadne hľadáme aj ďalšie zaujímavé útvary), nájdeme štvorce, ktorých dve strany tvorí časť plota a druhé dve strany pozostávajú len z viditeľných bodov. Jedna diagonála štvorca je časťou „neviditeľnej“ hlavnej diagonály, druhá je vyššie spomenutou viditeľnou diagonálou.

Je, samozrejme, možné a pravdepodobné, že ste objavili ďalšie útvary. Tie, ktoré sme vymenovali, tvoria základ, na ktorý budeme v ďalšom nadväzovať a ďalej ho rozvíjať.

3.4. A kde zostali čísla?

Z doterajšieho rozprávania by sa mohlo zdať, že pán Gardner je čistý geometer. Ale nie je to tak, a aj jemu samotnému pri skúmaní záhrady už čísla začínali chýbať. Navyše sa mu zdalo, že je načase urobiť v kreslení a organizácii záhrady trochu poriadok. Stačilo k tomu málo. Označil si číslami $1, 2, 3, 4, \ldots$ postupne jednotlivé kolmé hriadky, t. j. stĺpce stromov, a podobne si číslami $1, 2, 3, 4, \ldots$ označil aj jednotlivé riadky.

Úloha 5:

Viete, na čo mu to bolo dobré? Ako sa dá tento nápad využiť pri popise sadu?

Riešenie:

Všimnime si, že až na výnimky si v našej súradnicovej sústave vystačíme so súradnicami z oboru nezáporných celých čísiel, nula pritom bude mať len (doslovne) okrajový význam.

Odpoveď je jednoduchá, pre popis polôh stromov v záhrade sme zaviedli súradnicovú sústavu. Každý strom (alebo bod), ktorého viditeľnosť skúmame, tak môžeme určiť pomocou dvoch súradníc: čísla stĺpca a čísla riadku, na priesečníku ktorých sa nachádza. Môžeme dodržať zaužívanú prax, že prvé číslo udáva stĺpec a druhé riadok. Strom zo súradnicami $(3, 4)$ sa teda nachádza v treťom stĺpci a štvrtom riadku. Pokiaľ by sme však zvolili opačné poradie, nasledujúce úvahy by zostali rovnaké. Navyše, vzhľadom na symetriu situácie, viditeľnosť stromov líšiacich sa len poradím súradníc je vždy rovnaká.

Úloha 6:

Predstavte si, že by sme zobrazenie sadu a rysujúce sa vlastnosti viditeľnosti jeho stromov chceli spracovať a skúmať aj softvérovo. Skúste si vytvoriť základnú predstavu programu, ktorý by sa s touto úlohou vysporiadal.

Riešenie:

Každý čitateľ si samozrejme môže zvoliť svoj prístup. Dátovým základom však zrejme bude dvojrozmerné pole objektov, ktoré zodpovedajú stromom a ich vlastnostiam. Alebo naopak (pri objektovom prístupe) objekt strom, ktorého základnými atribútmi budú jeho súradnice. Zatiaľ jedinou jasnou vlastnosťou stromov je ich viditeľnosť a základným algoritmom jej určenie. Pokiaľ má naša dátová predstava sadu bližšie k poľu, môžeme ju určovať aj iteratívnym algoritmom naznačeným v prvom bode riešenia úlohy 2. Pokiaľ rozmýšľame len o objekte stromu, cítime potrebu algoritmu, ktorý určí jeho viditeľnosť len na základe súradníc. Priblížime sa k nemu vyriešením nasledujúcich úloh.

Úloha 7:

Získajme skúsenosti s popisovaním vlastností sadu a jeho stromov pomocou súradníc odpoveďou na niekoľko ľahkých otázok:

1. Aké súradnice majú stromy rastúce vedľa plotu?
2. Aké majú súradnice stromy na hlavnej diagonále a na vedľajších diagonálach?
3. Aké sú súradnice stromov susedných k danému stromu a stromov ležiacich na sever od neho?
4. Ako by vyzeral test (alebo implementovaná funkcia), ktorá pre dva stromy vyhodnotí ich susednosť?
5. Navrhnite ďalšie podobné otázky vhodné pre vašich žiakov.

Riešenie:

Odpovieme iba na prvé štyri body.

1. Súradnice sú typu $(n, 1)$ a $(1, n)$, kde n je ľubovoľné kladné prirodzené číslo. Vzhľadom na dohodu o poradí súradníc z úlohy 5, body so súradnicami $(n, 1)$ zodpovedajú prvému riadku a $(1, n)$ prvému stĺpcu sadu.
2. Body na hlavnej diagonále majú súradnice tvaru (n, n). Bodom na diagonále pod ňou zodpovedajú súradnice $(n + 1, n)$ a nad ňou súradnice $(n, n + 1)$. Premenná n opäť prebieha cez všetky kladné prirodzené čísla (množinu $\mathbb{N}^+$).
3. Ak má bod súradnice (n, m), tak s ním susedia body so súradnicami $(n + 1, m)$, $(n - 1, m)$, $(n, m + 1)$, $(n, m - 1)$. Tieto body sú vo vzdialenosti 1. Vo vzdialenosti

$\sqrt{2}$ sú body so súradnicami $(n+1, m+1)$, $(n+1, m-1)$, $(n-1, m+1)$, $(n-1, m-1)$. Týchto osem bodov sa v sieti mrežových bodov štandardne považuje za susedov. Susedia na sever od stromu (n, m) majú súradnice (n, k), kde $k > m$.

4. Pre body so súradnicami (n, m) a (k, l) určíme ich susednosť najlepšie vyhodnotením hodnoty výrazu $|n-k| + |m-l|$. Pre susedné body nadobúda hodnotu 1 alebo 2.

Určovanie stromov pomocou dvojíc čísel sa pánovi Gardnerovi veľmi zapáčilo. Keď si pomocou neho začal zapisovať záznamy o viditeľných a neviditeľných stromoch, objavil aj ďalšie užitočné vlastnosti tohto zápisu.

Úloha 8:

Skúsme teraz pomocou súradníc popísať aj vlastnosti týkajúce sa viditeľnosti stromov. Začneme nasledujúcimi otázkami:

1. Tri stromy najbližšie ku vchodu majú súradnice $(1, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Aké stromy sú nimi zakryté? Vymenujte časť z nich a popíšte tvar ich súradníc.
2. Aké stromy zakrývajú stromy so súradnicami $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 5)$? Aké majú súradnice a ako súvisia so súradnicami zakrývajúcich stromov? Aký matematický pojem dobre poslúži pre popis týchto vlastnosti?
3. Teraz skúsme odpovedať na opačné otázky. Budú vidieť stromy zo súradnicami $(2, 4)$, $(6, 2)$, $(8, 32)$, $(5, 35)$? Ak nie, ktoré stromy ich zacláňajú? Ako sa táto vlastnosť prejavuje na ich súradniciach?
4. Riešte rovnakú úlohu pre stromy so súradnicami $(8, 12)$, $(18, 27)$, $(25, 15)$, $(42, 63)$?
5. Ako vyzerá všeobecné pravidlo, ako na základe súradníc stromu rozhodnúť o jeho viditeľnosti?

Riešenie:

1. Bod so súradnicami $(1, 1)$ zakrýva všetky stromy na hlavnej diagonále. Ide teda o body so súradnicami $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ atď. Ako sme už spomenuli, ich súradnice majú tvar (n, n), $n \in \mathbb{N}^+$. Bod zo súradnicami $(1, 2)$ zakrýva body $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$ atď. Ich súradnice majú tvar $(n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Pre bod so súradnicami $(2, 1)$ je situácia rovnaká, len s opačným poradím súradníc Zakrýva preto body tvaru $(2n, n)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Táto vlastnosť opäť vyplýva zo symetrie celej situácie. V ďalšom sa preto budeme venovať prevažne bodom, ktorých prvá súradnica je menšia alebo rovná druhej.
2. Bod so súradnicami $(1, 3)$ zakrýva body zo súradnicami $(2, 6)$, $(3, 9)$, $(4, 12)$ atď., všeobecne tvaru $(n, 3n)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Obe súradnice sú teda rovnakým kladným prirodzeným násobkom súradníc $(1, 3)$. Skontrolujte si odpoveď aj pre zvyšné dva body. Vhodným jazyk pre tieto vlastnosti sú vektory. Ak súradnice bodu chápeme ak súradnice vektora (n, m), zakrýva nám body zodpovedajúce aspoň dvojnásobkom tohto vektora.
3. Tieto body vidieť nebudú. Dá sa totiž nahliadnuť, že ich súradnice sú spoločným násobkom súradníc iných, ku vchodu bližších bodov. Postupne sú to body $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(1, 4)$ (ale tiež $(4, 16)$ alebo $(2, 8)$) a $(1, 7)$. (V reči vektorov ide o násobky iných, jednoduchších vektorov.) Pre tieto body platí, že jedna ich súradnica je násobkom druhej. Majú teda tvar $(n, k \cdot n)$ alebo naopak. Bod je preto určite skrytý za bodom so súradnicami $(1, k)$. Ale aj za inými. Podrobnejšie si tieto vlastnosti preberieme onedlho.

4. Ani tieto body vidieť nebudú z obdobných dôvodov ako v predchádzajúcom prípade. Bod $(8, 12)$ je napríklad skrytý za bodmi $(4, 6)$ alebo $(2, 3)$, bod $(42, 63)$ je skrytý za bodmi $(14, 21)$, $(6, 9)$, alebo $(2, 3)$. Súradnice skrytých bodov však majú zložitejší tvar. Nie sú svojím vzájomným násobkom, ale spoločným násobkom súradníc iného vektora. Napríklad $(42, 63) = (3 \cdot 14, 3 \cdot 21) = 3 \cdot (14, 21)$.

5. Odpoveď je naznačená v predchádzajúcich riešeniach. Všeobecne platí, že bod (vektor) nie je viditeľný, ak jeho súradnice sú spoločným kladným prirodzeným násobkom súradníc iného bodu (násobkom iného vektora). Táto skutočnosť sa však dá zistiť priamo zo súradníc bodu. Pozostávajú z dvoch čísiel, ktoré majú spoločného deliteľa. Pokiaľ súradnice vydelíme týmto deliteľom, dostaneme bod, ktorý ho zakrýva. Čím väčší je deliteľ, tým bližšie je delením získaný „zakrývajúci bod" bližšie ku vchodu. Ak použijeme najväčší spoločný deliteľ súradníc, dostaneme súradnice bodu, ktorý je najbližšie ku vchodu. Jeho súradnice už nemožno zjednodušiť, preto je to viditeľný bod. Bod je teda viditeľný vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ jeho súradníc je 1. Také čísla nazývame nesúdeliteľné.

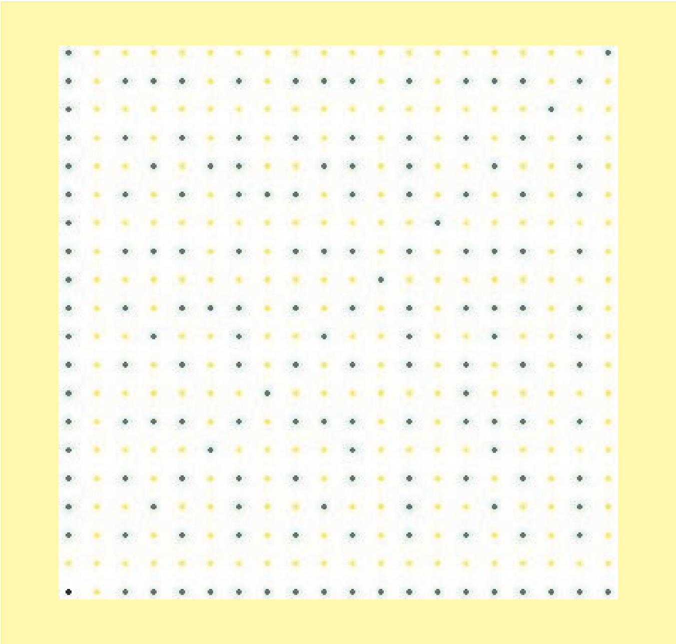
Keď si pán Gardner uvedomil práve popísané vlastnosti súradníc stromov a ich viditeľnosti, začal mať dojem, že niečo podobné už niekde videl. Dvojice čísel, ich spoločné delitele a špeciálny význam objektu, ktorý vznikne po vydelení najväčším z nich mu pripadali povedomé. Ste na tom rovnako? S takýmito objektami sme sa už v tejto učebnici stretli.

Úloha 9:

Aká známa matematická štruktúra a jej vlastnosti zodpovedajú súradniciam stromov a pravidlám ich viditeľnosti?
Riešenie:
Tých, čo odpoveď objavili, určite prekvapila a potešila. Hľadanou štruktúrou sú zlomky, presnejšie tie z nich, ktorých čitateľ aj menovateľ zodpovedajú kladným prirodzeným číslam. Vlastnosť viditeľnosti korešponduje s tým, či je zlomok vytvorený z jeho súradníc uvedený v základnom tvare. Pokiaľ áno, bod je viditeľný. Pokiaľ nie, bod nie je viditeľný. V jeho smere pri pohľade od chodu uvidíme bod, ktorého súradnice zodpovedajú zlomku uvedenému na základný tvar. Plánik sadu s vyznačenou viditeľnosťou mrežových bodov tak vlastne zviditeľňuje štruktúru (kladných) zlomkov, princíp ekvivalencie, ktorá určuje ktoré z nich sa rovnajú, a spôsob ako vyberať ich reprezentanta. Tým, že sme zvyknutí a vedení k práci so zlomkami prevažne v základnom tvare, zostáva nám táto štruktúra väčšinou skrytá. V ďalšom môžeme a budeme túto paralelu využívať. Otázky súvisiace s viditeľnosťou stromov môžeme riešiť pomocou vlastností zlomkov a deliteľnosti všeobecne.

Úloha 10:

Vráťme sa k informatickému pohľadu na problém. Máme už k dispozícii dostatočný aparát, aby sme zvládli základnú úlohu: vytvoriť program, ktorý nakreslí plánik sadu s vyznačením viditeľnosti mrežových bodov. Okrem toho navrhnite ďalšie metódy alebo funkcie, ktoré by mohli byť v programe implementované.
Riešenie:
Grafická zložka riešenia nie je komplikovaná. Na určenie a vykreslenie viditeľnosti mrežového bodu využijeme riešenie predchádzajúcej úlohy.



Podstatou je metóda pre určenie najväčšieho spoločného deliteľa (NSD). Pokiaľ vo vami používanom jazyku nie je táto metóda k dispozícii, nie je problém vytvoriť si vlastnú. S jej pomocou vytvoríme základnú metódu, ktorá pre daný bod rozhodne, či je viditeľný, alebo nie. Na ilustrácii vidíme výsledok práce jedného zo stredoškolákov, ktorý však mal stromami nahradený aj plot záhrady. Hodnotu NSD využijeme aj pri implementácii ďalších metód. Môžeme napríklad pre každý neviditeľný bod určiť bod, ktorý pri pohľade od vchodu jeho smerom uvidíme. Jeho súradnice získame po vydelení NSD. Iná otázka znie, koľko stromov je potrebné vypíliť, aby sme daný strom „zviditeľnili“. Odpoveďou je hodnota NSD zmenšená o 1. Môžeme si vypísať aj usporiadaný zoznam týchto stromov. Zložitejšia metóda môže pre súradnice dvojice bodov určiť, či sa tieto body navzájom zakrývajú (a v akom poradí), alebo nie. A pokiaľ sa chceme ozaj poriadne zamyslieť, môžeme metódy pripraviť tak, aby sa pozorovacie miesto zmenilo z vrcholu záhrady na ľubovoľný, ako vstupný parameter zadaný mrežový bod.

3.5. Zrátajme, čo sme videli

Ako sme zistili, geometrické vlastnosti záhrady a viditeľnosti stromov z jej vrcholu vieme popísať na základe vlastností súdeliteľnosti ich súradníc, resp. možností krátenia zlomkov zostavených z nich. Vieme pomocou súradníc a ich vlastností vysvetliť geometrické zaujímavosti, ktoré sme objavili v úlohe 4? Nasledujúce úlohy priamo nadväzujú na tam uvedené pozorovania.

Úloha 11:

Vysvetlite viditeľnosť stromov v prvom riadku a stĺpci, na hlavnej diagonále a diagonálach s ňou susediacich.

Riešenie:

Body prvého riadku alebo stĺpca majú súradnice tvaru $(n, 1)$ alebo $(n, 1)$. Každý spoločný deliteľ súradníc musí deliť obe z nich, teda aj 1. Takým deliteľom, a aj najväčším deliteľom, je len číslo 1. Ak je NSD rovný 1, strom je viditeľný. Body hlavnej diagonály majú naopak súradnice (n, n). Ich najväčší spoločný deliteľ je očividne n. Pokiaľ sa n rovná 1, bod je viditeľný, ak je väčšie, vidieť nie je. Body na susednej diagonále majú súradnice majú súradnice $(n, n-1)$ alebo $(n-1, n)$. Tu už potrebujeme jemnejšiu úvahu. NSD musí deliť čitateľ aj menovateľ zlomku, ak však delí obe čísla, musí deliť aj ich rozdiel. Ten je však $n-(n-1)=1$. Najväčším (a jediným) spoločným deliteľom tak môže byť len 1, a body sú preto viditeľné.

Úloha 12:

Vysvetlite dôvod výskytu vzorky viditeľnosti $1/1$ a jej opakovania, ako aj vzorky $2/1$ a ďalších v tvare $n/1$.

Riešenie:

Vzorky $1/1$ vidíme prvý raz v druhom riadku a stĺpci, Ten obsahuje body so súradnicami $(n,2)$ alebo $(2,n)$. Jedna zo súradníc je 2, NSD preto musí deliť 2. Pokiaľ ma spôsobiť neviditeľnosť stromu, musí byť NSD rovný 2. Spoločným deliteľom je potom práve vtedy, ak n je párne číslo. Neviditeľné stromy sú preto tie s párnou a neviditeľné s nepárnou druhou súradnicou. Táto vzorka sa však opakuje aj vo štvrtom, ôsmom, šestnástom a ďalších riadkoch (a stĺpcoch), ktorých jedna súradnica je mocninou čísla 2. Ich súradnice majú teda tvar $(n,2^m)$. Ich spoločný deliteľ preto delí aj číslo 2^m, a je preto tiež mocninou dvojky. Číslo n potom delí len vtedy, ak je párne, a nemôže ho deliť, ak je nepárne. Vzorku $1/1$ môžeme vidieť aj na diagonálach „obsusedných“ s hlavnou. Ležia na nej body so súradnicami $(n-2,n)$ a $(n,n-2)$. Ich spoločný deliteľ opäť musí deliť aj ich rozdiel $n-(n-2)=2$, a zaujímavý NSD je preto 2. Ten je skutočne deliteľom v prípade kladného čísla n a $n-2$. Vzorka $2/1$ funguje obdobne pre riadky a stĺpce, ktorých číslo je mocninou 3. Ďalšia vyskytujúca sa vzorka je však až $4/1$, potom $6/1$ a $10/1$. Dôvod, prečo sa niektoré vzorky typu $n/1$ nevyskytujú, je hlbší. Zložitejšie pravidlá rytmu viditeľných a neviditeľných bodov sa však dajú odvodiť z existujúcich základných vzoriek typu $n/1$.

Ako sme očakávali, pri riešení týchto úloh sa využíva deliteľnosť a jej vlastnosti. Dôležitou je skutočnosť, že ak čísla majú spoločného deliteľa, má ho aj ich súčet alebo rozdiel. S deliteľnosťou je úzko spojený aj pojem prvočísla, ktorý využijeme v ďalšej úlohe.

Úloha 13:

Vysvetlite dôvod „dobrej“ viditeľnosti stromov v niektorých stĺpcoch a šikmých úsečkách kolmých na hlavnú diagonálu.

Riešenie:

Pokiaľ začneme sledovať dobre viditeľné stĺpce a riadky, rýchlo objavíme, že ich poradové číslo zodpovedá prvočíslam. Ich súradnice preto majú tvar (p,n) kde p je prvočíslo. Ich NSD preto musí deliť aj p, a teda je to 1, alebo p. Pokiaľ je to 1, bod je viditeľný, čo zodpovedá nášmu pozorovaniu. Ak je to p, musí deliť aj druhú súradnicu n. To je však možné len vtedy, keď n je násobok čísla p. Neviditeľné sú preto naozaj len body (p,p), $(2p,p)$ atď. Šikmé „viditeľné“ úsečky sa s práve popísanými stĺpcami pretínajú „v plote“ (a vytvárajú spomenuté dobre viditeľné štvorce). Ich súradnice sú preto postupne $(0,p)$, $(1,p-1)$, $(2,p-2)$, ..., $(p-1,1)$ až $(p,0)$. Všeobecne majú tvar $(n,p-n)$, kde n prebieha od 1 po $p-1$ (pokiaľ nás zaujímajú len stromy, a nie plot). NSD týchto súradníc potom musí deliť aj ich súčet, a ten zodpovedá prvočíslu p. Prvočíslo p však nedelí žiadne n v rozsahu od 1 po $p-1$. NSD je preto 1, a body sú viditeľné.

Pán Gardner vo svojej záhrade zažil ešte veľa matematických dobrodružstiev. Skúmanie vzorcov viditeľnosti a všeobecne pomeru viditeľných a neviditeľných stromov v jednotlivých riadkoch ho viedlo k hľadaniu riadkov, v ktorých je tento pomer najvyšší a najnižší. Všimol si tiež, že vzorka viditeľných a neviditeľných stromov, ktorá sa objaví v riadku alebo stĺpci v úseku od plota po hlavnú diagonálu, sa v jeho pokračovaní už pravidelne opakuje. Metódami použitými aj v riešení predchádzajúcich úloh túto vlastnosť aj ľahko dokázal. A spolu s pánom Euklidom, ktorý ho prišiel na záhradu navštíviť, využili túto skutočnosť na zjednodušenie spôsobu výpočtu NSD. Na tomto mieste sa budeme podrobne venovať inej, tiež veľmi vzácnej návšteve.

3.6. Čo je ako ďaleko, alebo návšteva pána Pytagora

Po pánovi Euklidovi prišiel na návštevu do už slávnej záhrady ďalší velikán, pán Pytagoras. Aj on sa spolu s pánom Gardnerom kochal pohľadom od bránky na vzorne zoradené stromy. Zaujímali ho však praktickejšie veci. Hlavne ako ďaleko sú stromy od bránky a koľko sa pri ich pestovaní treba nachodiť. Veľmi sa potešil, že pri výpočte vzdialeností sa používala aj jeho slávna veta.

Úloha 14:

V akej vzdialenosti od vchodu do záhrady sa nachádzajú stromy so súradnicami $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ atď.? Ako vypočítame vzdialenosť stromu so súradnicami (m, n)? Je vzdialenosť niektorých stromov celočíselná? Skúste vytvoriť (usporiadaný) zoznam vzdialeností stromov od vchodu a počtu stromov, ktoré sa v tejto vzdialenosti nachádzajú.
Riešenie:
Odpovieme na všeobecnú otázku. Pokiaľ má bod súradnice (m, n), jeho vzdialenosť od vchodu je preponou pravouhlého trojuholníka s odvesnami n a m. Jej hodnota je preto $\sqrt{m^2 + n^2}$. Celočíselné vzdialenosti vychádzajú v známych prípadoch tzv. pytagorejských trojíc, napr. $(3, 4, 5), (6, 12, 13)$ atď. Vzdialenosť stromu so súradnicami $(3, 4)$ má preto vzdialenosť $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Navrhovaný zoznam je možné vypisovať ručne, alebo si jeho generovanie naprogramovať. Vzhľadom na grafickú symetriu neprekvapuje, že vo väčšine vzdialeností (okrem diagonálnych) sa nachádzajú dvojice stromov.

Zoznam so vzdialenosťami a počtami stromov pána Pytagora zaujal. Hlavne ho prekvapilo, že v žiadnej vzdialenosti sa zatiaľ nenachádzali viac ako dva stromy. Platí to vždy, alebo nemáme zoznam dostatočne dlhý? Ako to vyzerá v tom vašom?

Úloha 15:

Doplňte zoznam tak, aby sa v ňom nachádzali všetky vzdialenosti menšie ako 10. Aké počty stromov sa v zozname objavili?
Riešenie:
V tomto prípade je už pomoc programu viac ako vítaná. Ale aj ručnou prácou sa dá nájsť minimálne jedna štvorica stromov. Majú súradnice $(4, 7)$, $(7, 4)$, $(1, 8)$ a $(8, 1)$. Ich vzdialenosť je $\sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$.

Pomocou vygenerovania dostatočne dlhého zoznamu by sme určite našli aj ďalšie, podobné vzdialenosti, v ktorých sa nachádza dokonca viac, ako štyri stromy. Pokúsme sa problém v poslednej úlohe vyriešiť matematicky.

Úloha 16:

Objavte a vysvetlite podstatu predchádzajúceho výsledku. Vieme na základe toho objaviť ďalšie vzdialenosti, v ktorých sa nachádzajú viac ako dva stromy?
Riešenie:
Vieme, že pre vzdialenosti platí rovnosť $\sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{8^2 + 1^2}$. Potom sa rovnajú aj druhé mocniny vzdialenosti, teda $4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$. Tento výraz môže skúsiť upraviť na tvar, z ktorého lepšie pochopíme podstatu tejto rovnosti:

$$4^2 - 1^2 = 8^2 - 7^2$$

$$(4 - 1) \cdot (4 + 1) = (8 - 7) \cdot (8 + 7)$$

$$3 \cdot 5 = 1 \cdot 15$$

$$15 = 15$$

Keďže použité úpravy boli ekvivalentné, môžeme postup sledovať aj od konca. Vychádzame z toho, že číslo 15 sa dá rozpísať dvomi spôsobmi na súčin dvojice (rôznych) čísel. Tie sa dajú napísať ako súčin súčtu a rozdielu opäť dvoch rôznych dvojíc čísel. Zvyšok práce už vykoná vzorec

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

a presun výrazov na správnu stranu rovností. Dá sa toto vysvetlenie zopakovať aj všeobecne? Predpokladajme, že stromy s rôznymi (nie len prehodenými) súradnicami (m, n) a (k, l) majú rovnakú vzdialenosť od vchodu. Potom musia platiť nasledovné vzťahy:

$$m^2 + n^2 = k^2 + l^2$$
$$m^2 - l^2 = k^2 - n^2$$
$$(m - l) \cdot (m + l) = (k - n) \cdot (k + n)$$

Pokiaľ predpokladáme, že $m > n$ a $k > l$, dá sa ukázať, že všetky činitele v poslednom riadku sú kladné. Keďže všetky súradnice sú prirodzené čísla, musí byť tiež rozdiel medzi činiteľmi na ľavej strane párny (líšia sa o $2l$), a tak isto je párny (líši sa o $2n$) rozdiel činiteľov na pravej strane.

Na základe tohto výsledku sa môžeme pokúsiť o opačnú cestu. Zoberieme číslo, ktoré sa dá dvomi (alebo viac) spôsobmi napísať ako súčin dvoch o párne číslo sa líšiacich činiteľov. Napríklad

$$24 = 2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$$

Oba súčiny teraz rozpíšme do tvaru $(a - b) \cdot (a + b)$. To sa nám podarí, keď a bude priemer činiteľov, b polovica ich rozdielu. Obe hodnoty budú, keďže sa líšia o párne číslo, prirodzené čísla! Potom už stačí dokončiť výpočet.

$$(7 - 5) \cdot (7 + 5) = 2 \cdot 12 = 4 \cdot 6 = (5 - 1) \cdot (5 + 1)$$

$$72 - 52 = 52 - 12$$
$$72 + 12 = 52 + 52$$
$$50 = 50$$

Keďže strom so súradnicou $(5, 5)$ leží na hlavnej diagonále, v tomto prípade sme našli vzdialenosť $\sqrt{50}$, v ktorej sa nachádzajú tri stromy $(5, 5)$, $(1, 7)$ a $(7, 1)$. Ak začneme z čísla s viac rozkladmi, napríklad $48 = 2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$, dostaneme štvoricu stromov vo vzdialenosti $\sqrt{185}$ a trojicu vo vzdialenosti $\sqrt{170}$. Na tomto mieste nám asi napadne, či v niektorej vzdialenosti neleží, aj päť, šesť alebo ešte viac stromov. Riešenie tohto problému už necháme na čitateľa, prípadne jeho žiakov.

3.7. Namiesto záveru. . .

Aj keď naše rozprávanie končí, sad pána Gardnera v sebe skrýva ešte mnoho prekvapení. Pokiaľ vás zaujal, a prípadne máte vytvorený softvér, ktorý vám pri práci v záhrade pomáha, ponúkame vám ešte zopár inšpirácií.

- Existuje určitý prevod a súvis medzi viditeľnosťou stromov v stĺpcoch a viditeľnosťou v diagonálach rovnobežných s hlavnou?
- Ako určiť z čísla stĺpca dĺžku najmenšej periódy opakovania vzorky viditeľnosti stromov?
- Aká je najväčšia limitná hodnota pomeru neviditeľných stromov k viditeľným pre jednotlivé stĺpce?

4. Geometria

Táto kapitola slúži predovšetkým ako pripomenutie učiva zo základnej a strednej školy. Zvolili sme formu, pri ktorej poslucháči sami môžu obnovovať svoje poznatky z geometrie (ak si ich náhodou nepamätajú).

4.1. Základné úlohy

Príklad 1

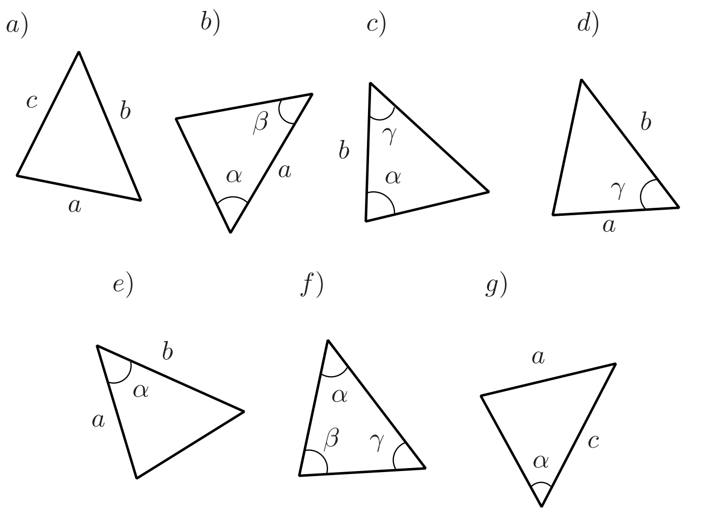
Nájdite obdĺžnik, ktorý má celočíselné dĺžky strán, obsah $12\,\mathrm{cm}^2$ a maximálny možný obvod.
Riešenie:
Obsah obdĺžnika je $a{\cdot}b$ a obvod $2a+2b$. Keďže dĺžky strán majú byť celočíselné a jeho obsah je $12\,\mathrm{cm}^2$, do úvahy prichádzajú len rozmery $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$ (alebo naopak), ďalej $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 2\,\mathrm{cm}$ (alebo naopak) a $a = 12\,\mathrm{cm}$, $b = 1\,\mathrm{cm}$ (alebo naopak). Maximálny obvod $26\,\mathrm{cm}$ dosiahneme, ak jedna strana má dĺžku $12\,\mathrm{cm}$ a druhá dĺžku $1\,\mathrm{cm}$. Ďalšie celočíselné riešenia nedávajú maximálny obvod.

Otázky

- Ako by vyzeral obdĺžnik s obsahom $9\,\mathrm{cm}^2$ a minimálnym obvodom?
- Ako bude vyzerať obdĺžnik s daným obvodom a maximálnym obsahom?

Príklad 2

Trojuholník ABC má dĺžky strán $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ ($a \neq b \neq c$) a veľkosti uhlov pri vrcholoch A, B, C sú $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Na nasledujúcom obrázku máme náčrty niekoľkých trojuholníkov. Podľa ktorého náčrtu možno zostrojiť trojuholník ABC?

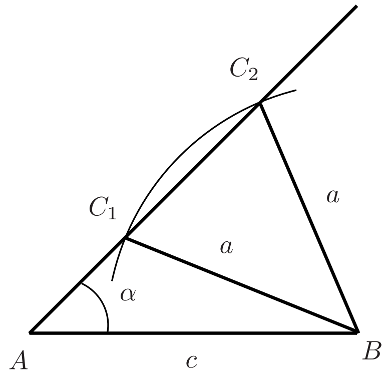


Riešenie:
Využijeme vety o zhodnosti trojuholníkov *sss*, *sus* a *usu*, podľa ktorých sú dva trojuholníky zhodné, ak majú rovnako veľké:

1. všetky tri strany,

2. dve strany a uhol medzi nimi,
3. stranu a uhly pri jej koncových vrcholoch.

Trojuholník ABC možno zostrojiť z náčrtu (a) — veta *sss*, z náčrtu (c) — veta *usu*, z náčrtu (d) — veta *sus*. Podľa náčrtov (b), (e) by sme zostrojili trojuholníky, ktoré nie sú zhodné s trojuholníkom ABC, pretože v zadaní nesedí rozloženie strán a uhlov. Náčrt (f) nedáva jednoznačné riešenie, existuje nekonečne veľa trojuholníkov, ktoré majú uhly veľkosti α, β a γ. Náčrt (g) nemusí dať jednoznačné riešenie. Pri istých rozmeroch môžu existovať dva trojuholníky, ako vidieť na nasledujúcom obrázku.

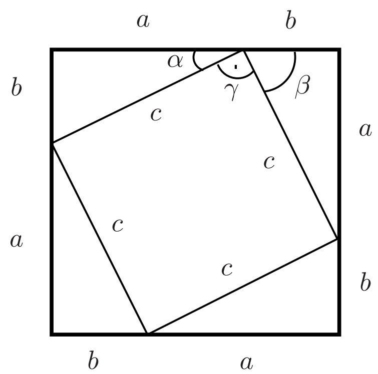


Otázky

- Kedy sa dá z náčrtu (g) zostrojiť práve jeden trojuholník?
- Prečo sú dôležité podmienky vo vetách *sus* a *usu*, že zadaný uhol musí byť medzi stranami, ktorých dĺžky poznáme, respektíve že strana, ktorej dĺžku poznáme, musí byť medzi uhlami so zadanou veľkosťou?

Príklad 3

Dôkaz ktorej známej vety o trojuholníkoch možno odvodiť z nasledujúceho obrázka? Vedeli by ste ten dôkaz odvodiť?



Riešenie:
Obrázok reprezentuje jeden z (mnohých) dôkazov Pytagorovej vety. Pravouhlý trojuholník s odvesnami a, b sa tam nachádza štyrikrát — v každom rohu štvorca. Na vyriešenie tejto úlohy potrebujeme vedieť, ako sa počíta obsah štvorca a pravouhlého

trojuholníka. Ďalej potrebujeme fakt, že súčet veľkostí uhlov v trojuholníku je 180°, a tiež využijeme jednoduché úpravy výrazov.

Najprv si musíme uvedomiť, že útvar v strede je štvorec, to znamená, že uhol γ je pravý. Súčet uhlov $\alpha + \beta + \gamma$ je 180° (pretože tieto uhly tvoria priamy uhol, ako to možno vidieť na obrázku) a súčet uhlov $\alpha + \beta + 90^\circ$ v príslušných pravouhlých trojuholníkoch je tiež 180°. Takže $\gamma = 90^\circ$. Podobne ostatné uhly v štvoruholníku so stranami dĺžky c sú pravé, takže je to štvorec.

Obsah veľkého štvorca na obrázku je $S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Obsah tohto štvorca však možno vyjadriť aj ako súčet obsahov štyroch pravouhlých trojuholníkov s odvesnami dĺžky a, b a obsahu menšieho štvorca so stranou dĺžky c, čiže $S = 2ab + c^2$. Keď porovnáme oba vzťahy, dostávame $a^2 + b^2 = c^2$.

Otázky

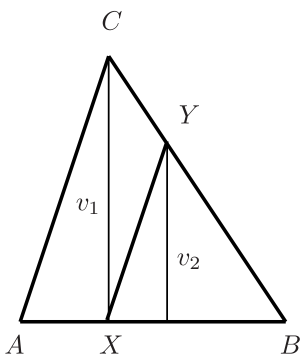
- Aké ďalšie vety o pravouhlom trojuholníku poznáte?
- Vedeli by ste využiť Euklidove vety na dokázanie platnosti Pytagorovej vety?

Príklad 4

Doplňte chýbajúce údaje o veľkostiach uhlov a strán v trojuholníkoch ABC a KLM, ak viete, že sú podobné a $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|KM| = 3\,\mathrm{cm}$, $|ML| = 5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle KML| = 30^\circ$, $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$.
Riešenie:
Keďže trojuholníky sú podobné, musia mať rovnaké uhly: 90°, 60°, 30°. Jedna zo strán KM, ML musí byť prepona (odvesny majú spoločný pravý uhol). Prepona musí byť ML, pretože je dlhšia ako KM. Pomocou Pytagorovej vety vypočítame dĺžku strany $|KL| = 4\,\mathrm{cm}$.

Príklad 5

Obsah trojuholníka ABC je $1\,\mathrm{dm}^2$. Úsečky XB a YB tvoria dve tretiny úsečiek AB a CB. Žiak napísal, že obsah trojuholníka XBY je $\frac{2}{3}\,\mathrm{dm}^2$. Má pravdu, alebo sa mýli?
Riešenie:
Žiaľ, mýli sa. Situácia je na nasledujúcom obrázku. Obsah trojuholníka ABC je $S_1 = \frac{1}{2} v_1 c$ (c je dĺžka strany $|AB|$) a trojuholníka XBY je $S_2 = \frac{1}{2} v_2 (\frac{2}{3} c)$. Keďže sú trojuholníky ABC a XBY podobné a ich strany sú v pomere $3:2$, tak v tomto pomere musia byť aj ich výšky v_1 a v_2. Takže $v_2 = \frac{2}{3} v_1$ a $S_2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} v_1 \frac{2}{3} a = \frac{4}{9} S_1 = \frac{4}{9}\,\mathrm{dm}^2$.



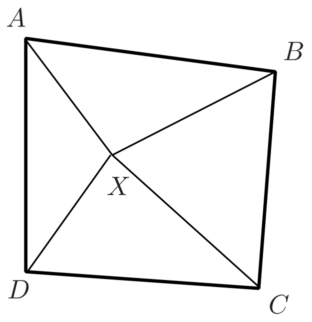
Otázky

- Prečo sú trojuholníky ABC a XBY podobné?
- Prečo sú v rovnakom pomere ako strany aj ich výšky?
- Trojuholník ABC má strany dĺžky $11\,\mathrm{cm}$, $15\,\mathrm{cm}$, $25\,\mathrm{cm}$ a trojuholník KLM má strany dĺžky $13\,\mathrm{cm}$, $16\,\mathrm{cm}$, $29\,\mathrm{cm}$. Ktorý z trojuholníkov má väčší obsah?

Nebude v tom háčik?

Príklad 6

Aký je súčet veľkostí vnútorných uhlov konvexného n-uholníka? Úlohu vyriešte pre $n \in \{4, 5, 6\}$. Pri riešení využite, že súčet uhlov v trojuholníku je $180°$.
Riešenie:
Úlohu vyriešime pre štvoruholník. Zvolíme si ľubovoľný vnútorný bod (označme ho X) tohto štvoruholníka a spojíme ho s jeho štyrmi vrcholmi ako na ďalšom obrázku. Súčet veľkostí uhlov všetkých štyroch takto vzniknutých trojuholníkov je $4 \cdot 180°$. Súčet veľkostí uhlov pri vrchole X je $360°$. Takže súčet veľkostí uhlov pri vrcholoch A, B, C, D je $4 \cdot 180° - 360° = 360°$. Podobne možno úlohu vyriešiť aj pre ďalšie n-uholníky. Všeobecný „vzorec“ pre súčet veľkostí uhlov takéhoto n-uholníka je $n \cdot 180° - 360° = (n-2) \cdot 180°$.



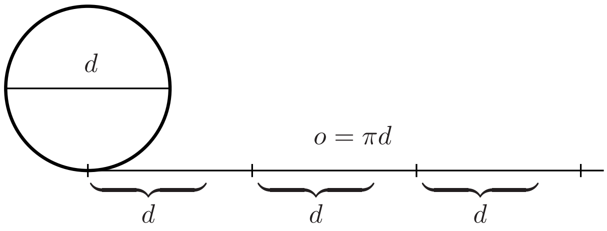
Príklad 7

Zmestí sa kruhová podložka, ktorej plocha je $78\,\mathrm{cm}^2$ do kruhového otvoru s priemerom $12\,\mathrm{cm}$?
Riešenie:
Polomer kruhového otvoru je $6\,\mathrm{cm}$ a polomer r kruhovej podložky zhora odhadneme zo vzťahu pre výpočet obsahu kruhu $S = \pi \cdot r^2$, odkiaľ máme $r = \sqrt{S/\pi} < \sqrt{78/3{,}14}\,\mathrm{cm} < 5\,\mathrm{cm}$, takže podložka sa do otvoru zmestí, pretože je kruhová a má menší polomer ako otvor.

Poznámky

Číslo π je považované za jedno z najdôležitejších čísel vôbec. Vyjadruje pomer medzi obvodom o a priemerom d kruhu $o : d = \pi$ (odkiaľ máme aj vzťah na výpočet obvodu kruhu $o = \pi \cdot d$).

To, že tento pomer je konštantný, si uvedomovali už v starovekom Babylone a Egypte. V Babylone napríklad používali pre π hodnotu $3\frac{1}{8} = 3.125$. Gréci sa naučili počítať toto číslo s väčšou presnosťou a preborníkom bol slávny Archimedes, ktorý určil, že toto číslo leží medzi hodnotami $3\frac{10}{71} \doteq 3{,}1408$ a $3\frac{1}{7} \doteq 3{,}1429$, čo je presnosť, ktorá postačuje pri väčšine bežných výpočtov (hlavne v škole) aj v súčasnosti.

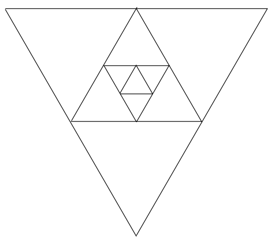


4.2. Náročnejšie úlohy

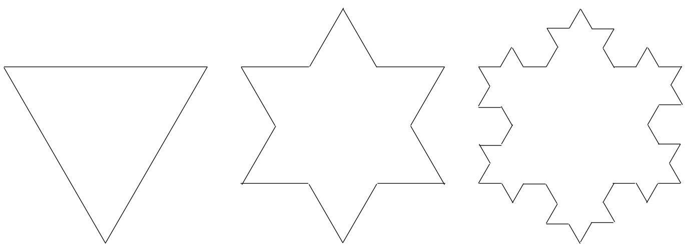
Táto časť prináša náročnejšie úlohy určené predovšetkým učiteľom matematiky, u ktorých je oprávnené predpokladať, že si nepotrebujú zopakovať základy elementárnej geometrie. O riešenie týchto úloh sa však môžu pokúsiť všetci poslucháči.

1. Táles z Milétu bol v starovekom Grécku považovaný za jedného z najväčších učencov. Okrem toho, že je považovaný za zakladateľa filozofie a je mu pripisovaná Tálesova veta, prekvapil Egypťanov, keď určil výšku Veľkej pyramídy. Stačil mu na to tieň tejto pyramídy, palica, ktorej dĺžku poznal a vedomosti o trojuholníkoch. Vedeli by ste zopakovať jeho postup?

2. Vezmime si rovnostranný trojuholník so stranami dĺžky $10\,\mathrm{cm}$. Stredy jeho strán spojme úsečkami, vznikne rovnostranný trojuholník so stranami dĺžok $5\,\mathrm{cm}$. Stredy jeho strán opäť spojme do rovnostranného trojuholníka. Takto môžeme vpisovať postupne do seba nekonečne veľa rovnostranných trojuholníkov (niekoľko prvých krokov je na nasledujúcom obrázku). Aký je súčet ich obvodov?

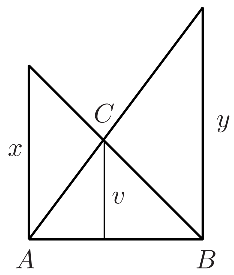


3. Istý kráľ sa rozhodol, že rozumne využije peniaze daňových poplatníkov a okolo svojho paláca dá postaviť plot. Cenu určil na 1 zlatý dukát za meter plota. Výberové konanie vyhrala firma, ktorá navrhla nasledujúci tvar plota. Vezmime rovnostranný trojuholník so stranami dĺžky $1\,\mathrm{dm}$. Všetky strany rozdelíme na tri zhodné úsečky. Nad každou zo stredných úsečiek zostrojíme rovnostranný trojuholník (orientovaný smerom von) a túto strednú úsečku odstránime. Vo vzniknutom útvare toto opäť zopakujeme: rozdelíme všetky úsečky na tretiny, nad strednými úsečkami zostrojíme rovnostranné trojuholníky a stredné úsečky potom zmažeme (situácia je na obrázku nižšie).

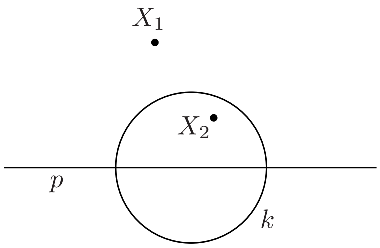


Keď takto pokračujeme donekonečna, dostaneme útvar, podľa ktorého víťazná firma postavila plot. Aký je obvod tohto útvaru a koľko musel kráľ tejto firme zaplatiť?

4. Určte výšku v trojuholníka ABC na nasledujúcom obrázku, ak poznáte hodnoty x a y.



5. Je daná kružnica k, priamka p prechádzajúca stredom kružnice a bod X, ktorý neleží na kružnici, ani na priamke (pozri nasledujúci obrázok s oboma možnosťami polohy bodu X). Z bodu X zostrojte kolmicu na priamku p, ale použite len pravítko (nie trojuholníkové) a ceruzku.

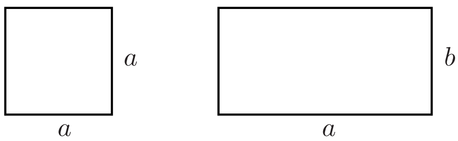


6. Čo by sa zmenilo v predchádzajúcej úlohe, keby X ležal na kružnici k? Čo by sa zmenilo, keby sme mohli použiť kružidlo?

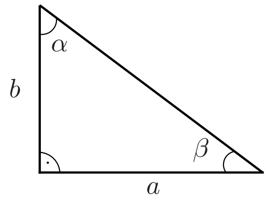
4.3. Prehľad používaných vzorcov

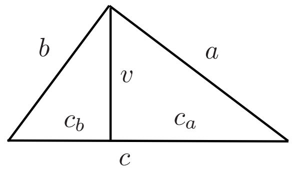
V tejto časti prinášame prehľad niektorých používaných vzorcov z elementárnej geometrie.

- **Štvorec**
  (a je dĺžka jeho strany)
  - obvod $4a$
  - obsah a^2
- **Obdĺžnik**
  (a, b sú dĺžky jeho kolmých strán)
  - obvod $2a + 2b$
  - obsah ab



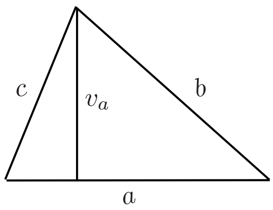
- **Pravouhlý trojuholník**
  (a, b sú odvesny, c je prepona trojuholníka, v je výška na preponu)



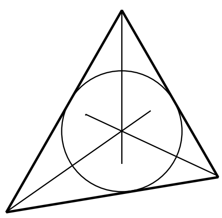


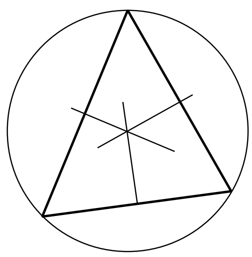
- obsah $\frac{ab}{2}$
- Pytagorova veta $c^2 = a^2 + b^2$
- Euklidova veta o výške $v^2 = c_1 c_2$
- Euklidove vety o odvesnách $a^2 = cc_1$, $b^2 = cc_2$, kde $c = c_a + c_b$

- **Trojuholník**
  (a, b, c sú strany trojuholníka, v_x je výška na stranu x)



- obvod $a + b + c$
- obsah $\frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$
- Herónov vzorec pre obsah $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$
- stred kružnice vpísanej do trojuholníka leží na priesečníku osí uhlov
- stred kružnice opísanej trojuholníku leží na priesečníku osí strán
- polomer vpísanej kružnice $\frac{S}{s}$, kde S je obsah a $s = \frac{a+b+c}{2}$
- polomer opísanej kružnice $\frac{abc}{4S}$, kde S je obsah



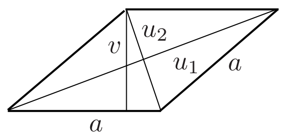


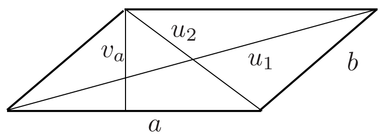
- súčet vnútorných uhlov trojuholníka je $180°$
- trojuholníkové nerovnosti: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$
- dva trojuholníky sú zhodné:
  1. ak majú rovnaké dĺžky všetkých troch strán (veta *sss*)
  2. rovnaké dĺžky dvoch strán a rovnaký uhol medzi týmito stranami (veta *sus*)

     sus - sviňa (lat.)
  3. rovnaké dva uhly a dĺžku strany, ktorá je spoločným ramenom týchto uhlov (veta *usu*)
- dva trojuholníky sú podobné:

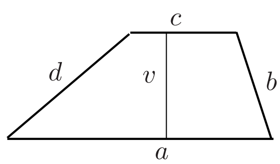
1. ak sa rovnajú pomery dĺžok všetkých zodpovedajúcich si strán (veta *sss*)
2. ak sa rovnajú pomery dĺžok dvoch dvojíc zodpovedajúcich si strán a majú rovnaký uhol medzi týmito stranami (veta *sus*)
3. ak majú rovnaké dva uhly (veta *uu*)

- **Kosoštvorec**
  (a je dĺžka jeho strany)
  - obvod $4a$
  - obsah $av = \frac{u_1 u_2}{2}$, kde v je vzdialenosť protiľahlých strán a u_1 a u_2 dĺžky oboch uhlopriečok
- **Kosodĺžnik**
  (a, b sú dĺžky jeho rôznobežných strán)
  - obvod $2a + 2b$,
  - obsah $av_a = bv_b$, kde v_x je vzdialenosť protiľahlých strán dĺžky x

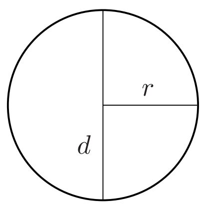


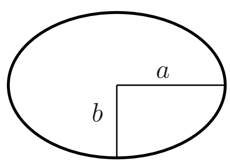


- **Lichobežník**
  (a a c sú základne, v ich vzdialenosť b a d ramená)



  - obvod $a + b + c + d$
  - obsah $\frac{a+c}{2}v$
- **Kruh a elipsa**
  (r je polomer kruhu, d je priemer kruhu, a, b sú polosi elipsy)
  - obvod kruhu je $\pi d = 2\pi r$
  - obsah kruhu je $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$
  - obsah elipsy je πab





5. Funkcie

Príklad 1

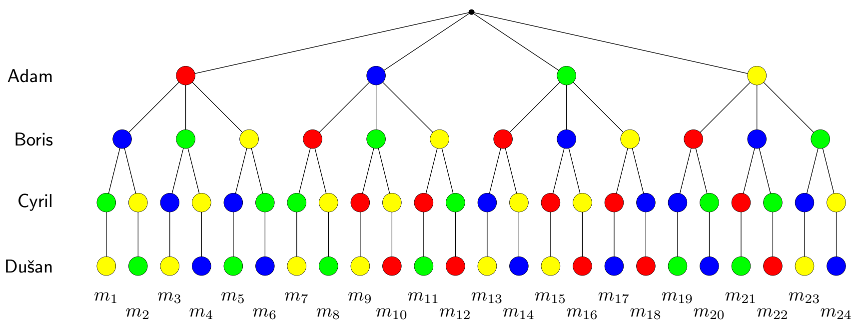
Štyria hudobníci — Adam, Boris, Cyril a Dušan — sú veľkými priaznivcami skupiny Beatles a rozhodli sa, že si založia ich revival band. Aby sa slávnej štvorke podobali čo najviac, povedali si, že sa budú navzájom oslovovať ich menami. Nevedia sa však dohodnúť, kto bude kto. Koľko majú možností a ktoré sú to?

Riešenie:

Chlapci sa najprv riadne rozhádali, ba hrozilo, že sa rozpadnú. Potom si však spolu zaspievali *We Can Work It Out*, a hneď našli riešenie: Dohodli sa, že si budú mená beatlesákov vyberať v poradí, o ktorom rozhodne žreb. Ten prisúdil právo prvej voľby Adamovi, druhý bude vyberať Boris, tretí Cyril a posledný Dušan. Pripomeňme si mená liverpoolskej štvorky – John Lennon, Paul McCartney, George Harrison a Ringo Starr (prvý je na obrázku vľavo hore, ďalší v smere hodinových ručičiek) — a začnime teda takpovediac od Adama:

- Ak si Adam vyberie meno John, Borisovi ostanú mená Paul, George a Ringo.
  - Ak si Boris vyberie Paula, Cyrilovi zvýšia George a Ringo.
    - Ak si Cyril vyberie meno George, Dušan už nemá na výber, musí byť Ringom. Túto možnosť označíme m_1.
    - Ak si Cyril vyberie meno Ringo, Dušan už nemá na výber, musí byť Georgeom. Túto možnosť označíme m_2.
  - Ak si Boris vyberie Georgea, Cyrilovi zvýšia Paul a Ringo.
    - Ak si Cyril vyberie meno Paul, Dušan už nemá na výber, musí byť Ringom. Túto možnosť označíme m_3.
    - Ak si Cyril vyberie meno Ringo, Dušan už nemá na výber, musí byť Paulom. Túto možnosť označíme m_4.
  - Ak si Boris vyberie Ringa, Cyrilovi zvýšia Paul a George.
    - Ak si Cyril vyberie meno Paul, Dušan už nemá na výber, musí byť Georgeom. Túto možnosť označíme m_5.
    - Ak si Cyril vyberie meno George, Dušan už nemá na výber, musí byť Paulom. Túto možnosť označíme m_6.
- Ak si Adam vyberie meno Paul, Borisovi ostanú mená John, Goerge a Ringo.
  - Ak si Boris vyberie Johna, Cyrilovi zvýšia . . .

Treba pokračovať? Iste sa vieme dovtípiť, ako by tento rozbor pokračoval. Zbavme sa preto už nudiaceho, lebo opakujúceho sa, omáčkového textu, a možnosti radšej načrtnime vo forme stromu, pričom kvôli prehľadnosti bude mať každý člen Beatles znázornený jednou farbou – John červenou, Paul modrou, George zelenou a Ringo žltou:



Všimnime si, že všetky vetvy tohto stromu (teda postupnosti spojníc uzlov zhora nadol, od najvyššieho — koreňa — po najnižšie — listy) majú rovnakú dĺžku a že všetky uzly na tej istej úrovni sa rozvetvujú na rovnaký počet spojníc s ich potomkami.

Ešte prehľadnejšie to azda bude v tabuľke:

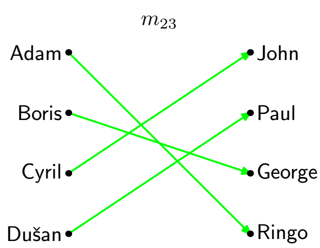
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}
Adam	J	J	J	J	J	J	P	P	P	P	P	P
Boris	P	P	G	G	R	R	J	J	G	G	R	R
Cyril	G	R	P	R	P	G	G	R	J	R	J	G
Dušan	R	G	R	P	G	P	R	G	R	J	G	J

	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	m_{17}	m_{18}	m_{19}	m_{20}	m_{21}	m_{22}	m_{23}	m_{24}
Adam	G	G	G	G	G	G	R	R	R	R	R	R
Boris	J	J	P	P	R	R	J	J	P	P	G	G
Cyril	P	R	J	R	J	P	P	G	J	G	J	P
Dušan	R	P	R	J	P	J	G	P	G	J	P	J

Všimnime si, že každá z týchto možností je istou permutáciou mien členov skupiny Beatles.

Dodajme, že keby šlo len o počet riešení, mohli by sme postupovať šikovnejšie. Adam, ktorý vyberá prvý, má na výber štyri možnosti. (Všimnime si, že tie prislúchajú prvej úrovni v našom strome.) Avšak bez ohľadu na to, ktorú si vyberie, Borisovi ostanú už iba tri možnosti. Každej zo 4 možností Adama teda prislúchajú 3 Borisovi (hoci v každom prípade iné), čo spolu znamená 12 možností. (To sú práve tie, ktoré zodpovedajú uzlom z druhej úrovne.) Cyrilovi teda zvýšili v každom prípade dve možnosti, čím sa počet možností zdvojnásobí na 24. (Opäť ich môžeme nájsť v strome, a to na tretej úrovni.) Bez ohľadu na to, ako vyberali Adam, Boris a Cyril, minuli tri mená zo štyroch, Dušan teda v žiadnom prípade nemá na výber, počet možností sa už teda nezvýši. Počet permutácií mien členov skupiny Beatles je teda $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, t. j. $4!$, čiže 24.

Každá z 24 možností ($m_1, \ldots, m_{24}$) je vlastne istým priradením, ktoré môžeme znázorniť aj obrázkom. V tomto prípade ide o možnosť m_{23}. Na ľavej strane sú mená chlapcov a z každého z nich vedie práve jedna šípka k niektorému z beatlesákov vpravo. Všimnime si pritom, že žiadne dve šípky nemajú spoločný cieľ:



Otázky

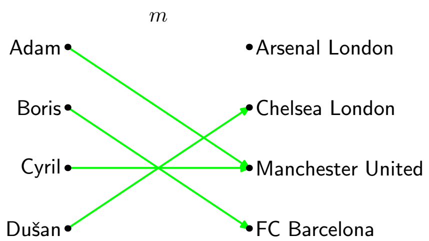
- Prečo 4 možnosti Adama a 3 možnosti Borisa dávajú spolu 12 (súčin) možností, a nie 7 (súčet)?
- Ako by sa zmenili možnosti, keby žreb určujúci poradie výberu dopadol inak? A keby to boli úplne iní štyria chlapci?
- Koľko možností by existovalo, ak by Boris trval na tom, že on ako bubeník predsa musí byť Ringo?
- Koľko permutácií by existovalo, ak by šlo o skupinu Pink Floyd, pozostávajúcu z Rogera Watersa, Davida Gilmoura, Nicka Masona a Richarda Wrighta?
- Ako by to bolo v prípade, keby chlapcov i počet členov skupiny bol n?
- Ako by to bolo v prípade, keby chlapcov bolo n a počet členov skupiny m? Musí to byť hudobná skupina? Musia byť jej členovia ľudia? Je dôležité, komu/čomu členov/členy skupiny priradzujeme?

Príklad 2

Naši štyria chlapci sa okrem Beatles vášnivo zaujímajú aj o futbal, kvôli Lige majstrov sú ochotní prerušiť aj skúšku. Všetci sú veľmi smutní, že ich obľúbený FC Liverpool neprekročil prah semifinále, keď ho vyradil Arsenal Londýn. Okrem toho postúpilo aj ďalšie londýnske mužstvo Chelsea a štvoricu dopĺňa Manchester United a jediný zástupca kontinentálneho futbalu, katalánska FC Barcelona. Po vypadnutí mužstva z mesta Beatles si každý z nich napriek znechuteniu tipol, ktoré z týchto štyroch mužstiev sa stane šampiónom. Koľko možností pripadá do úvahy teraz?

Riešenie:
Úlohu by sme mohli riešiť veľmi podobne ako predchádzajúcu. Uvedomme si však, že tentoraz Adamov výber žiadnym spôsobom neobmedzuje výber Borisa, veď prečo by nemohli držať palce tomu istému tímu? To isté, pravdaže, platí aj pre Cyrila a Dušana, všetci štyria teda majú na výber rovnako – štyri možnosti. Celkový počet možností teda bude $4 \times 4 \times 4 \times 4$, t. j. 4^4, čiže 256.

Všetky z nich sú aj tu akési priradenia, každé z nich možno načrtnúť vo forme obrázku. Jedno z nich vyzerá takto:



Všimnime si, že aj tentoraz z každého chlapca vychádza len jedna šípka, no niektoré z nich (na rozdiel od predchádzajúceho príkladu) môžu mať spoločný cieľ (na obrázku to tak aj je, spoločným koncom Adamovej a Cyrilovej šípky je Manchester United).

Otázky

- Podobne ako v predchádzajúcom príklade by sme mohli, pravdaže, nakresliť aj strom všetkých možností. Aké dlhé by boli jeho vetvy? Koľko potomkov by mali jeho uzly?
- Ak by sa chlapci dohodli, že Arsenalu predsa fandiť nemôžu, koľko možností tipovania by bolo – 3^4, 4^3, alebo nebodaj nejaký iný počet?
- Ako by to bolo v prípade, keby chlapcov bolo n a počet tímov m? Musia to byť futbalové tímy? Musia to byť chlapci?

Poznámky

Malý výlet do kombinatoriky tu môžeme ukončiť. Ale prečo sme si ho urobili v stati, ktorá sa mala venovať niečomu celkom inému – funkciám? Celkom inému? Ale kdeže, veď sme o nich rozprávali celý čas. Len sme ich nazývali inak – priradenia.

Čo to teda funkcia je? Na jej definíciu v prvom rade potrebujeme dve množiny, povedzme A a B, a potom budeme „kresliť šípky“ smerujúce z A do B (nie však naopak). Úlohu množiny A hrali v oboch príkladoch naši štyria fanúšikovia Liverpoolu.

V prvom príklade bola množinou B skupina Beatles, v druhom semifinalisti Ligy majstrov. A teraz k šípkam:

Uvedomme si, že pri žiadnej z nich vôbec nezáleží na ich tvare, farbe či hrúbke, dôležité je len vedieť, kde sa začína a kde sa končí. Ak si teda jej začiatok označíme a a koniec b (pričom, ako sme sa dohodli, prvok a je z množiny A, t. j. $a \in A$, a prvok b je z množiny B, t. j. $b \in B$), šípku môžeme bez straty informácie popísať usporiadanou dvojicou $\langle a, b\rangle$ (slovom „usporiadaná" chceme vyjadriť, že na poradí a a b záleží, veď začiatok a koniec šípky nemožno vymeniť).

Napríklad šípky z obrázka v prvom príklade možno považovať za usporiadané dvojice $\langle \text{Adam}, \text{Ringo}\rangle$, $\langle \text{Boris}, \text{George}\rangle$, $\langle \text{Cyril}, \text{John}\rangle$ a $\langle \text{Dušan}, \text{Paul}\rangle$, kým na obrázku z druhého príkladu sú šípkami dvojice $\langle \text{Adam}, \text{Manchester United}\rangle$, $\langle \text{Boris}, \text{FC Barcelona}\rangle$, $\langle \text{Cyril}, \text{Manchester United}\rangle$ a $\langle \text{Dušan}, \text{Arsenal Londýn}\rangle$.

Funkcia bude potom zložená z takých šípok, inými slovami bude to množina príslušných usporiadaných dvojíc. Na prvom obrázku je teda funkcia

$$m_{23} = \{\langle \text{Adam}, \text{Ringo}\rangle, \langle \text{Boris}, \text{George}\rangle, \langle \text{Cyril}, \text{John}\rangle, \langle \text{Dušan}, \text{Paul}\rangle\}$$

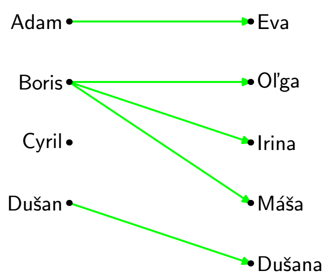
a na druhom

$$m = \{\langle \text{Adam}, \text{Manchester United}\rangle, \langle \text{Boris}, \text{FC Barcelona}\rangle,$$
$$\langle \text{Cyril}, \text{Manchester United}\rangle, \langle \text{Dušan}, \text{Arsenal Londýn}\rangle\}.$$

Ako však uvidíme v ďalšom príklade, vec má malý háčik:

Príklad 3

V prestávke semifinálového zápasu, ktorý naši štyria kamaráti spoločne sledovali vo svojej skúšobni, prišla reč na ich tretiu spoločnú obľúbenú tému: ženy. Zistili, že všetky ich sestry práve odcestovali na východ od/do raja: Adamova Eva je na ofiologickom kongrese kdesi medzi Tigrisom a Eufratom, Borisove tri sestry Irina, Máša a Oľga šli do Moskvy pozrieť ďalšieho svojho brata Andreja, a Dušanova Dušana zachraňuje duše v Dušanbe. Len Cyril nemohol povedať nič, lebo má len brata, Metoda. Je vzťah „sestra" funkcia?
Riešenie:
Uvedené údaje môžeme zakresliť do obrázka:



Vidíme tu dva problémy: Prvým je, že z Cyrila nejde žiadna šípka. To však môžeme ľahko napraviť, jednoducho ho budeme ignorovať, čiže zmenšíme množinu naľavo. Druhý problém však napraviť nemožno: z Borisa vychádza priveľa šípok.

Kým v prvých dvoch príkladoch sme (v rámci danej možnosti) na otázku „A čo Boris?" vedeli odpovedať jednoznačne (v prvom príklade pri možnosti m_{23} to bol George, v druhom pri možnosti označenej m FC Barcelona), tu sú na otázku „Ako sa volá Borisova sestra?" správne odpovede tri, a my môžeme Borisovi priradiť len jednu z nich, čím ostatné dve diskriminujeme.

Množina šípok

$$\{\langle \text{Adam}, \text{Eva}\rangle, \langle \text{Boris}, \text{Irina}\rangle, \langle \text{Boris}, \text{Máša}\rangle, \langle \text{Boris}, \text{Oľga}\rangle, \langle \text{Dušan}, \text{Dušana}\rangle\}$$

teda nemôže byť funkcia.

Poznámky

Musíme teda požadovať, aby ku každému prvku a z množiny A bol priradený najviac jeden prvok z B. Definíciu teda môžeme skompletizovať:

> Nech A a B sú ľubovoľné množiny a f podmnožina množiny $\{\langle a, b\rangle : a \in A, b \in B\}$ (t. j. ich karteziánskeho súčinu $A \times B$). Potom f nazývame funkcia, ak pre každý prvok a z A a každé dva rôzne prvky b_1 a b_2 z B je prvkom f najviac jedna z dvojíc $\langle a, b_1\rangle$ a $\langle a, b_2\rangle$.

Predchádzajúca množina dvojíc, vyjadrujúca vzťah „sestra“ teda nie je funkcia, lebo keď položíme napríklad $a = \text{Boris}$, $b_1 = \text{Oľga}$ a $b_2 = \text{Irina}$, tak v našej množine sú ako $\langle a, b_1\rangle$, tak $\langle a, b_2\rangle$.

Vzťah „najstaršia sestra“ už však funkciou je, pretože (ak zanedbáme nepravdepodobnú možnosť dvojčiat porodených sekciou a dvoma synchronizovanými pôrodníkmi) každý má najviac jednu najstaršiu sestru.

Kauza Cyril nás upozorňuje, že nie každý prvok množiny A musí mať partnera z množiny B. Tie prvky, ktoré ju majú, tvoria takzvaný definičný obor. V prípade najstaršej sestry je teda definičný obor množina $\{\text{Adam}, \text{Boris}, \text{Dušan}\}$, teda prvok Cyril do nej nepatrí. V beatlesáckom a futbalovom príklade mali všetky funkcie (tam sme ich ešte nazývali priradenia) definičný obor rovnaký, a to $\{\text{Adam}, \text{Boris}, \text{Cyril}, \text{Dušan}\}$.

Otázky

- Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich vzťahov sú funkcie:
  - mama,
  - stará mama,
  - sesternica,
  - manželka,
  - dcéra,
  - najstaršia dcéra.

  Ak sú, aké sú ich definičné obory?

Poznámky

Pri práci s funkciami používame nasledujúce označenie: Ak f je funkcia a $\langle a, b\rangle$ je jej prvkom (čo znamená, že už pre žiadne iné c nie $\langle a, c\rangle$ prvkom f), namiesto b píšeme $f(a)$.

$$a \longrightarrow f(a)$$

Napríklad pre funkciu m z druhého príkladu píšeme

$$m(\text{Adam}) = \text{Manchester United}$$

lebo $\langle \text{Adam}, \text{Manchester United} \rangle \in m$, a z rovnakého dôvodu

$$\begin{aligned} m(\text{Boris}) &= \text{FC Barcelona} \\ m(\text{Cyril}) &= \text{Manchester United} \\ m(\text{Dušan}) &= \text{Arsenal Londýn} \end{aligned}$$

Vieme už, že funkcia vlastne znamená rôznosť prvých zložiek všetkých jej usporiadaných dvojíc. Rôznosť druhých však zaručená nie je, ako ukazuje funkcia m, veď $m(\text{Adam}) = m(\text{Cyril}) = $ Manchester United. Naproti tomu všetky funkcie z príkladu o Beatles boli vyberané principiálne tak, aby bola zaručená aj rôznosť druhých zložiek. Túto vlastnosť nazývame prostota. Môžeme teda definovať:

Funkciu f nazývame prostá, ak pre každé dva rôzne prvky a_1 a a_2 z jej definičného oboru sú rôzne aj hodnoty $f(a_1)$ a $f(a_2)$.

Otázky

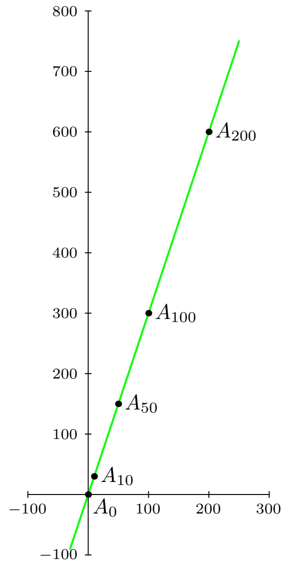
- Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú prosté:
  - otec,
  - manžel,
  - manžel (v Európe),
  - prvorodený syn.
- Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú prosté:
  - hlava štátu,
  - hlava štátu (pre európske štáty),
  - vlajka štátu,
  - vlajka štátu (pre európske štáty).
- Určte definičný obor nasledujúcich funkcií a rozhodnite, či sú prosté:
  - meno,
  - priezvisko,
  - meno s priezvisko,
  - adresa,
  - rodné číslo,
  - číslo občianskeho preukazu,
  - evidenčné číslo vozidla,
  - číslo v katastri.
- Dôležité zobrazenia v informatike:
  - Prečo musí byť každá kódovacia funkcia prostá?
  - Prečo nesmie byť žiadna hašovacia funkcia prostá?

Poznámky

Pojem funkcie je v matematike kľúčový, vyskytuje sa vo všetkých jej oblastiach, často však funkcie má rôzne krycie názvy, ako už spomínané priradenie, alebo zobrazenie či operácia.

Otázky

- Určte definičný obor nasledujúcich funkcií a rozhodnite, či sú prosté:
  - algebraické operácie:
    - súčet,
    - rozdiel,
    - súčin,
    - podiel,
    - druhá odmocnina,
  - geometrické zobrazenia:
    - zhodnosť,
    - podobnosť,
    - rovnoľahlosť,
    - osová súmernosť,
    - stredová súmernosť,
    - posunutie,
    - rovnobežné premietanie.



Príklad 4

A opäť sa vráťme k našim štyrom priateľom, ktorí už medzitým stihli nacvičiť toľko beatlesoviek, že sa odhodlali odohrať svoj prvý koncert. Boli úplne nadšení z toho, že hneď našli starý kultúrny dom, kde by sa mohol koncert konať, ale hlavne zo správcovho sľubu, že od nich nebude chcieť nič za prenájom priestoru. Cenu vstupenky stanovili na tri eurá. Správca sa však po čase spamätal, a svoj názor zmenil. Povedal chlapcom, že majú dve možnosti: buď mu z každého predaného lístka dajú štyridsať percent, alebo mu za prenájom zaplatia paušálne sto päťdesiat eur. Ktorú možnosť majú naši beatlesáci zvoliť?

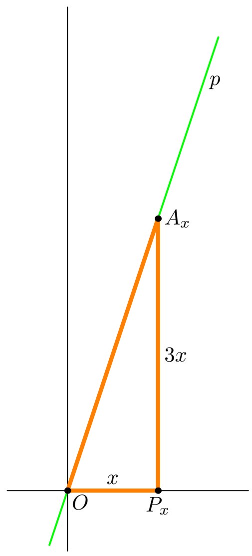
Riešenie:

Aby sme sa v situácii trochu zorientovali, zabudnime na chvíľu na problémy so správcom i aparatúrou. Uvedomme si, že chlapci nevedia, koľko ľudí príde na ich koncert. Keď ich bude x (a lístok, ako vieme, bude stáť 3 eurá), celkový výťažok z koncertu bude $3x$ eur. Uveďme do tabuľky niektoré hodnoty:

počet ľudí	x	0	10	50	100	200
výťažok (v eurách)	$3x$	0	30	150	300	600

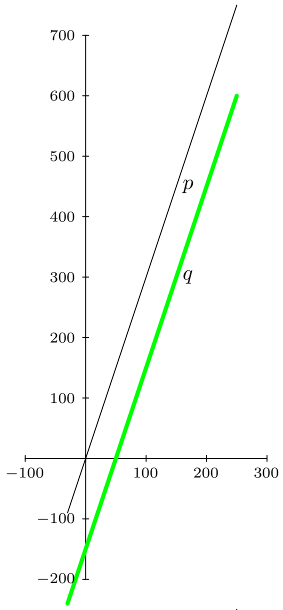
Všimnime si, že stĺpce tejto tabuľky sú vlastne usporiadané dvojice, v ktorých je druhá zložka trojnásobkom prvej, konkrétne sú to $A_0 = \langle 0, 0\rangle$, $A_{10} = \langle 10, 30\rangle$, $A_{50} = \langle 50, 150\rangle$, $A_{100} = \langle 100, 100\rangle$ a $A_{200} = \langle 200, 600\rangle$.

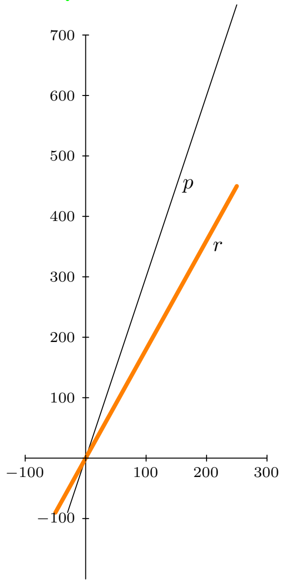
S nejakými usporiadanými dvojicami sme sa už stretli, tieto však majú isté špecifikum: obe zložky každej z nich sú čísla. Čo keby sme sa teda na tieto dvojice pozerali ako na body v dvojrozmernom priestore, čiže v rovine? Prvá zložka usporiadanej dvojice bude prvá súradnica zodpovedajúceho bodu, a druhá zložka zasa druhá súradnica. Našich päť usporiadaných dvojíc teda bude znamenať týchto päť bodov zakreslených v pravouhlej súradnicovej sústave:



Ako vidíme, ich poloha je dosť podozrivá — akoby všetky ležali na jednej (pol)priamke. A naozaj, ak označíme počiatok súradnicovej sústavy O a päty výšok z našich bodov A_x na vodorovnú os P_x, pre každý trojuholník OP_xA_x platí

$$\mathrm{tg}(\sphericalangle P_xOA_x) = \frac{|P_xA_x|}{|OP_x|} = \frac{3x}{x} = 3,$$





takže tento pomer – zvaný smernica – je konštantný. A keďže sú všetky tieto trojuholníky pravouhlé s pravým uhlom pri P_x, podľa vety *sus* sú všetky podobné (ba dokonca rovnoľahlé). To však znamená, že všetky uhly $\sphericalangle P_x O A_x$ sú rovnako veľké, a teda všetky naše body A_x ležia naozaj na tej istej priamke p so smernicou 3. Ba čo viac, ukázali sme vlastne, že na nej ležia aj všetky ostatné body zodpovedajúce bodom so súradnicami $\langle x, 3x\rangle$, a to bez ohľadu na to, či v našej tabuľke sú, alebo nie.

Uvedomme si, že v skutočnosti nás zaujímajú iba tie body priamky p, ktorých prvá súradnica x je prirodzené číslo, hoci na našom obrázku je vyznačená celá priamka - pri geometrickej predstave sa totiž s reálnymi číslami pracuje jednoduchšie než s prirodzenými.

A ešte jedna vec je dôležitá: Vyššie uvedenú tabuľku vieme doplniť o ľubovoľný stĺpec so zadaným horným políčkom: na „otázku“ x v prvom riadku existuje totiž jediná „odpoveď“ v druhom, a to $3x$. To však znamená, že takto vzniknutá množina usporiadaných dvojíc je funkcia. A pretože jej grafické znázornenie – tzv. graf – je, ako vidíme, priamka, takáto funkcia sa nazýva lineárna.

Vráťme sa však k našim chlapcom a ich problémom so správcom. Ako vieme, ten im dal dve možnosti. Rozoberme ich:

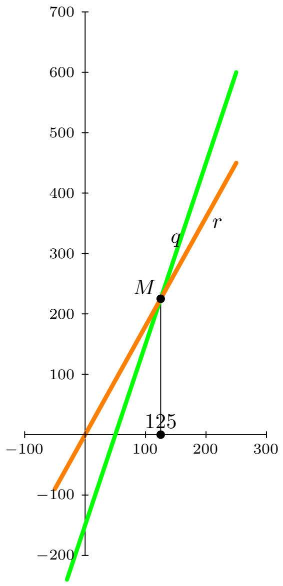
1 Keď majú z každého predaného lístka odovzdať štyridsať percent ceny, ostane im šesťdesiat. Výťažok z jedného lístka je teda $60\% \cdot 3$ eur, teda $1,8$ eura. Tu môžeme úplne zopakovať predchádzajúcu úvahu, keď sme rátali s $1,8$ eurami za lístok. Opäť budú body – tentoraz so súradnicami $\langle x,\ 1,8x\rangle$ – ležať na priamke (označme ju q), avšak pod menším sklonom – uhol, ktorý bude táto priamka zvierať s vodorovnou osou, bude mať smernicu $1,8$.

   Všimnime si, že aj priamka q prechádza počiatkom súradnicovej sústavy.

2 Pri druhej možnosti sa síce výťažok z predaja lístkov nemení, avšak v skutočnosti ho musíme zmenšiť o sumu, ktorú musia chlapci odovzdať správcovi - od $3x$ eur teda musíme odrátať v zadaní spomínaných 250 eur. V grafickom znázornení to vlastne znamená, že každý bod A_x treba posunúť nadol o hodnotu 150, inými slovami, treba o túto hodnotu nadol celú priamku p, čím dostaneme priamku r, čo bude množina všetkých bodov so súradnicami $\langle x, 3x - 150\rangle$. A keďže pre dané x je hodnota $3x - 150$ určená jednoznačne, je to naďalej funkcia.

   Ako vidíme, na rozdiel od priamok p a q už priamka r neprechádza počiatkom súradnicovej sústavy. Stále je to však priamka, teda aj táto funkcia je lineárna.

Zhrňme si obe možnosti do jedného obrázka:



Vieme, že čím je hodnota (vzhľadom na zvislú os) vyššie, tým viac peňazí chlapcom ostane. To teda znamená, že pre malé počty návštevníkov bude vhodnejší postup 1 (ktorý zodpovedá priamke p), kým pre väčšie postup 2 (čiže podľa priamky r).

Mali by sme však ešte zistiť, kde presne sa táto situácia láme. Obrázok naznačuje, že kritickým miestom je priesečník priamok q a r, pre príslušný „počet“ (ak to je vôbec počet, čiže prirodzené číslo) poslucháčov sú totiž výťažky v oboch prístupoch úplne rovnaké. To teda znamená, že musí platiť $1,8x = 3x - 150$, z čoho po ekvivalentnej úprave dostávame $x = \frac{150}{1,2} = 125$. (Kvôli úplnosti dodajme, že v takom prípade získajú chlapci 225 (čo je ako $1,8 \cdot 125$, tak $3 \cdot 125 - 150$) eur.)

Ľahko tiež vidieť, že $1,8x < 3x - 150$ platí práve vtedy, keď $x > 125$, a $1,8x > 3x - 150$ platí práve vtedy, keď $x < 125$.

A tak máme odpoveď: Chlapci by sa mali rozhodnúť podľa toho, koľko ľudí sa im podarí presvedčiť. Ak si trúfajú zaujať viac než sto dvadsaťpäť ľudí, mali by si vybrať paušál. V opačnom prípade by sa mali uspokojiť s prvou správcovou možnosťou.

Otázky

- Ako sa zmení situácia, ak chlapci zvýšia cenu lístka na štyri eurá?
- Ako sa zmení situácia, ak správca bude namiesto sto päťdesiatich požadovať iba sto eur?
- Ako sa zmení riešenie celej úlohy, ak cena vstupenky bude k eur a správca bude požadovať buď p percent z každého predaného lístka, alebo paušál m eur?

Literatúra a zdroje

[1] Hejný, Milan a kol. *Teória vyučovania Matematiky 2*, SPN, Bratislava 1990.

[2] Ore, Oystein, *Number Theory and Its History*, Dover, NY, 1988.

[3] Znám, Štefan a kol., *Pohľad do dejín matematiky*, Alfa, SNTL, Bratislava, Praha, 1986.

[4] Hecht Tomáš, Sklenáriková Zita: *Metódy riešenia matematických úloh*

[5] Bálint, V., Bálintová, M., Bednářová, S., Višňovská, J., Závadová, I., Žabka, J.: *Úpravy výrazov na daný tvar*, KZDM MFF UK Bratislava 2000, TEMPUS AC JEP-13101-98

[6] P. Beckmann, *Historie čísla π (český preklad)*, Academia, Praha, 1998, ISBN 80-200-0655-9

[7] Milan Hejný: *Geometria naučila človeka myslieť*, SPN, Bratislava 7

[8] Hejný, M., Kuřina, F: *Dítě, škola a matematika (Konstruktivistické přístupy k vyučování)*, Praha, Portál 2001, ISBN 80-7178-581-4

[9] T. Pappasová, *Potešenie z matematiky (slovenský preklad)*, Nebojsa, Bratislava, 1997, ISBN 80-967724-6-5

[10] G. Polya, *How To Solve It*, Princeton University Press, 1985, ISBN 0-691-02356-5

[11] Š. Novoveský, K. Križalkovič, I. Lečko, *Zábavná matematika*, SPN, Praha, 1978

[12] Mária Sadloňová, Michal Sadloň, *Matematika - úlohy v škole neriešené*

[13] J. Tarábek a kol., *Geometria v príkladoch*, Didaktis, Bratislava, 2003, ISBN 80-89160-00-X

[14] Š. Znám a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*, SNTL,ALFA, Bratislava 1986, ISBN 63-572-86 3

[15] Pratchett T., Stewart I., Cohen J.: *Věda na Zeměploše*, Talpress, ISBN: 80-7197-243-6, EAN: 9788071972433, The Science of Discworld, 2004

Tento študijný materiál vznikol ako súčasť národného projektu Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika v rámci Aktivity „Vzdelávanie nekvalifikovaných učiteľov informatiky na 2. stupni ZŠ a na SŠ“.

Autori © RNDr. Katarína Bachratá, PhD.
RNDr. Hynek Bachratý, PhD.
Mgr. Oľga Czimmermannová
Mgr. Peter Cimmermann, PhD.
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD.
Mgr. Peter Novotný, PhD.
Mgr. Júlia Šišková
RNDr. Michal Winczer, PhD.

Názov Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika

Podnázov Matematika pre učiteľov informatiky 1

Študijný materiál prešiel recenzným pokračovaním.

Recenzenti RNDr. Ľubomír Salanci, PhD.
doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc.

Počet strán 48

Náklad 300 ks

Prvé vydanie, Bratislava 2009

Vydal Štátny pedagogický ústav, Pluhová 8, 830 00 Bratislava, v súčinnosti s Univerzitou Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Univerzitou Komenského v Bratislave, Univerzitou Konštantína Filozofa v Nitre, Univerzitou Mateja Bela v Banskej Bystrici a Žilinskou univerzitou v Žiline

Vytlačil BRATIA SABOVCI, s r.o., Zvolen

ISBN 978-80-89225-50-7